BIOMETRIKA

U POLJOPRIVREDI

NAPISAO:

DR. ING. ALOIS TAVČAR

RED. PROFESOR POLJOPRIVREDNO-ŠUMARSKOG
FAKULTETA SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

ZAGREB 1946

ZNANSTVENA POLJOPRIVREDNA KNJIŽNICA

SVEZAK 3

Urednik:

Prof. Univ. Dr. Ing. Mihovil Gračanin

TISAK NAKLADNOG ZAVODA HRVATSKE U ZAGREBU

Uvaženom učitelju

Dr. Ing. Janu Jelineku

profesoru Poljoprivredno-šumarskog fakulteta u Pragu

posvećuje

pisac

PREDGOVOR

Da bi se rezultati eksperimentalnoga rada u poljoprivredi mogli pravilno interpretirati i ocijeniti prije nego budu predani poljoprivrednoj praksi potrebno je, da se brojčani podaci ispravno matematski obrade. U tu nam svrhu služi biometrika.

God. 1929 napisao sam naputak za izračunavanje raznih varijaciono statističkih vrijednosti pod naslovom „Variaciona-statistika u eksperimentalnoj poljoprivredi". Knjižica je izašla iz štampe bez mog imprimatura na korekture sa mnogim štamparskim pogreškama, ali je i ovakova ubrzo bila rasprodana. Budući da nam je strana literatura o biometrici slabo pristupačna i da su i tamo pojedine partije ove discipline večinom podijeljene po različitim specijalnim priručnicima, a za primjere uzeti ponajviše organizmi i svojstva, koja nemaju poljoprivredne važnosti, odlučio sam da za naše potrebe pretežno na bilinogojskom materijalu iz vlastitih pokusa prikažem primienu različnih biometričkih metoda.

Knjiga je namijenjena u prvom redu poljoprivrednim stručnjacima i studentima poljoprivrede ali držim, da će se njome moći koristiti i stručnjaci i studenti drugih bioloških disciplina.

Ona naročito ima da bude poticaj za što širu i što češću primjenu biometrike u eksperimentalnom radu na cijelom području prirodoslovnih nauka kod nas.

Toplo zahvaljujem uredniku Znanstvene poljoprivredne knjižnice kolegi univ. prof. Dr. Mihovilu Gračaninu za mnoge dragocjene sugestije u pogledu pedagoške i stilističke obrade sastavaka.

Za savjesnu kontrolu računskih operacija i štamparske korekture zahvaljujem svom asistentu Ing. Mariji Kump.

Zagreb, svibnja 1946.

UVOD

Intenzivnim studijem fizikalnih i kemijskih svojstava mrtve tvari — naročito tokom zadnjeg rata — došlo se do mnogih novih otkrića, koja ljudski um kao nadmoćan gospodar može brzo iskoristiti i primijeniti u svim granama tehnike. Mrtvu tvar on modelira i transformira po svojoj volji u različne agregate podložene zakonima fizike i kemije. Tamo pak, gdje pokušava promijeniti kvalitet i kvantitet proizvodnje živih bića, kao na pr. u poljoprivredi, nailazi na vrlo velike zapreke i tek polagano, uz nebrojene napore i materijalne žrtve, krči put i nastoji, da iskoristivši poznate faktore proizvodnje i različne nove biološke procese, stvori organizme, koji će u određenom proizvodnom području dati što veću gospodarsku korist.

Vanjski izgled biljke i životinje rezultanta je genetskih osobina individua i njegove sposobnosti, kako on reagira na vanjske i unutarnje faktore proizvodnje.

Točno djelovanje ovih faktora, ni pojedinačno ni u skupinama, nije još istraženo. Intenzivnim eksperimentalnim radom na tom području, uz eksaktnu obradu brojčanih podataka, dolazimo do pravilnih dedukcija i bržih praktičnih uspjeha.

Opažajući i mjereći pojedina svojstva na skupini genetski jednakih organizama ustanovit ćemo da ona nisu posve jednaka nego različita. Ova je razlika uzrokovana time, što se intenzitet pojedinih vegetacijskih faktora ne može udesiti tako, da bi bio svim organizmima, pa ni samo jednoj maloj skupini, u jednakoj mjeri pristupačan. Prema tome je nejednaki intenzitet proizvodnih faktora uzrok, da svako svojstvo organizma u izvjesnim granicama varira.

G a u s s je prvi ustanovio, da kod mjerenja, vaganja ili brojenja pravimo redovno izvjesne pogreške, i da se brojčana vrijednost tog svojstva dade najbolje ustanoviti pomoću aritmetičke sredine velikog broja pojedinačnih mjerenja. Taj je Gaussov zakon o pogrešci bio najprije primjenjivan u astronomiji, pa zatim u fizici i tehnici.

Belgijski antropolog Q u é t e l e t je bio prvi, koji je u svom djelu »Anthropométric«, iz god. 1871. utvrdio, da Gaussov zakon o pogrešci vrijedi i kod mjerenja različnih svojstava živih organizama. Q u é t e l e t o v a su iskustva u brojčanom obrađivanju svojstava kod čovjeka potakla mnoge druge prirodoslovce, da matematički obrade brojčane podatke dobivene svojim pokusima s biljkama i životinjama. Iz tih prvih nastojanja, da se matematika primijeni na istraživanje varijabiliteta pojedinih svojstava organizama, razvila se kasnije posebna nauka, b i o m e t r i k a, naročito zaslugom engleskog matematičara P e a r s o n a, koji je god. 1900. izdao znamenito djelo »T h e g r a m m a r o f s c i e n c e«.

Pod b i o m e t r i k o m dakle razumijevamo primjenu matematičkih metoda kod istraživanja raznolikosti organizma i međusobne ovisnosti pojedinih svojstava, kako bi se ustanovio stupanj signifikantnosti eksperimentom dobivenih brojčanih podataka.

Račun vjerojatnosti i kombinatorika su matematički temelji, na kojima je izgrađena biometrika.

Ovdje ćemo se pozabaviti naročito biometrikom varijacije ili varijacionom statistikom i biometrikom korelacije kod poljoprivrednih biljaka i domaćih životinja, da upoznamo metodiku u poljoprivrednim istraživanjima.

A. VARIJABILITET

a) Općenito

Pod v a r i j a b i l i t e t o m nekog organizma razumijevamo promjenu njegovih svojstava izazvanu vanjskim i unutarnjim faktorima života.

Ako promotrimo potomke istih roditelja, ne ćemo nikada naći ni dva individua potpuno jednaka. Uzroci nejednakosti, odnosno varijabiliteta svojstava uglavnom su dvojaki to:

a) roditelji u svojim nasljednim osnovama nisu bili jednaki, ili

b) roditelji su imali podjednake nasljedne osnove, a pojedini su potomci rasli i razvijali se pod različnim životnim uvjetima.

Svako je svojstvo organizma uvjetovano djelovanjem i vanjskih i unutarnjih (nasljednih i dr.) faktora života.

Skup svih nasljednih osnova sačinjava njegov **idiotip.** Ove se osnove nalaze u: a) s t a n i č n o j j e z g r i, b) c i t o p l a z m i i c) p l a s t i d i m a. Prema tome se i d i o t i p sastoji od:

a) **genotipa:** osnove lokalizirane u staničnoj jezgri,
b) **plazmotipa:** „ „ „ citoplazmi, i
c) **plastidotipa:** „ „ „ plastidima.

Najvažnija su nasljedna svojstva organizma uvjetovana g e n o t i p o m.

G e n o t i p sačinjava velik broj temeljnih nasljedstvenih jedinica, koje zovemo nasljedstvenim ili g e n e t s k i m f a k t o r i m a ili g e n i m a.

G e n i određuju osobine svakog organizma, a vanjski faktori odlučuju, do koje će se mjere pojedina svojstva očitovati.

Ako imamo dva individua jednakoga genotipa, od kojih se jedan razvija pod jednim, a drugi pod drugim životnim uvje-

tima, onda njihove osobine ne će i ne mogu biti istovjetne. Konačni izgled izvjesnog svojstva je rezultanta međusobne djelatnosti gena i vanjskih faktora.

Bit nasljeđivanja leži u tome, da se roditeljski geni preko rasplodnih stanica prenose na potomstvo.

Da se neko svojstvo očituje, nije dovoljno prisustvo samih gena, nego je potreban i stanoviti intenzitet vanjskih faktora života. Već prema intenzitetu vanjskih faktora jedan će se isti organizam različito razvijati.

Skup svih gena jednog organizma sačinjavaju, kako je već spomenuto, njegov g e n o t i p, a skup svih značajka, svojstava i sposobnosti t. j. nasljednih i nenasljednih, njegov prividni tip ili f e n o t i p.

Zbog modifikacije istome fenotipu mogu pripadati i različni genotipovi, a i individui istoga genotipa ne moraju pripadati istome fenotipu.

Od genotipa zavise granice, do kojih se neko svojstvo može promijeniti — varirati. Ove su granice uvjetovane reakcionom sposobnošću ili reakcionom normom genotipa. Ova je reakciona norma nasljedna.

Po samome svojstvu, dakle po fenotipu, obično još ne možemo znati, kakav je njegov genotip. Naročito to vrijedi za kvantitativna svojstva, koja jače variraju od kvalitativnih.

Da bismo mogli brojkama karakterizirati izvjesno svojstvo, treba ga proučiti varijaciono-statistički i to tako, da ga istražimo na prosječnom uzorku i na dovoljno velikom broju organizama. I onda, ako za takva istraživanja upotrebimo skup individua istog genotipa, naravno je, da će obzirom na istraženo svojstvo među njima biti i individua sa ekstremno velikim vrijednostima — p l u s v a r i j a n t e — i ekstremno malim — m i n u s v a r i j a n t e. Osim toga naći ćemo pojedine varijante, koje imaju različne gradacije između jednog i drugog ekstrema. Razmak između jednog i drugog ekstrema zovemo v a r i j a c i o n o m ili m o d i f i k a c i o n o m š i r i n o m. Svaki individuum ima u toj širini, već prema brojčanoj vrijednosti svog svojstva, posve određeno mjesto. U toj varijacionoj širini svaki individuum se očituje kao jedna varijanta.

Ako brojčanu vrijednost pojedinih varijanata svrstamo u skupine s jednakim razmakom, a te skupine opet svrstamo po veličini, od najmanje do najveće, dobit ćemo vrlo preglednu i

karakterističnu podjelu varijanata. Vidjeti ćemo, da se broj varijanata u pojedinim skupinama diže od minus ekstrema otprilike do sredine, a onda opet, više ili manje simetrično pada do plus ekstrema. Najviše varijanata nalazimo dakle u srednjim skupinama.

Uzrok, što kod pojedinih varijanata, koje pripadaju jednom istom genotipu, isto svojstvo nije jednako nego različito — to jest da varira — leži u tome, što i n t e n z i t e t v a n j s k i h f a k t o r a (na pr. kod bilina: svjetlost, toplina, vlaga, hranjive tvari i t. d.) nije i ne može biti za svaku jedinicu potpuno jednak. Osim toga isti faktori djeluju nekad povoljno, nekad nepovoljno već prema svom intenzitetu.

Tab. I.

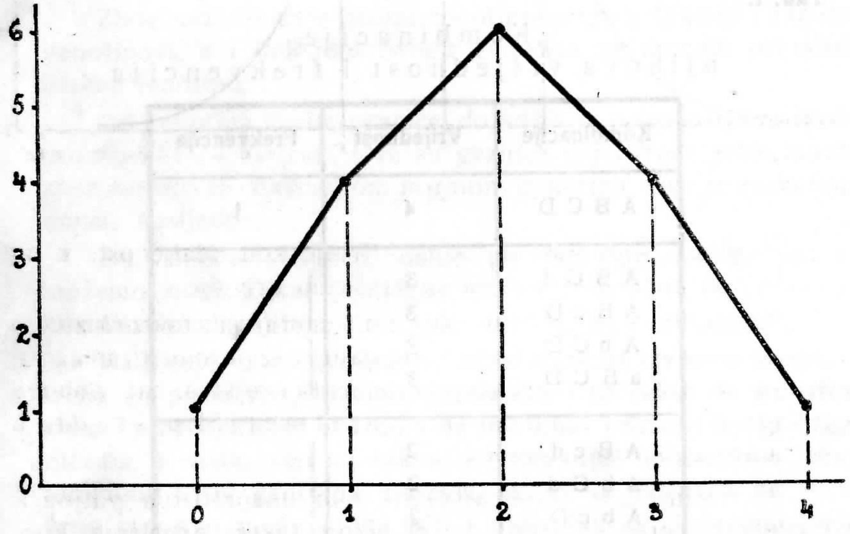
K o m b i n a c i j e,
n j i h o v a v r i j e d n o s t i f r e k v e n c i j a

Kombinacije	Vrijednost	Frekvencija
A B C D	4	1
A B C d	3	4
A B c D	3	
A b C D	3	
a B C D	3	
A B c d	2	6
A b C d	2	
A b c D	2	
a B C d	2	
a B c D	2	
a b C D	2	
A b c d	1	4
a B c d	1	
a b C d	1	
a b c D	1	
a b c d	0	1

Na pr.: neka visina organizma zavisi o 4 vegetacijska faktora **A**, **B**, **C** i **D**, od kojih svaki vrijedi 1. Odsustvo svakoga od njih označit ćemo s **a**, odnosno **b**, **c** i **d**, a odsustvo svih četiriju s **0**. U ovom slučaju ima 16 različitih kombinacija, a njihova brojčana vrijednost varira od **0** do **4**, kako to vidimo na skrižaljci Tab. I.

Ova podjela odgovara raspodjeli dobivenoj po binominalnoj formuli: $(a + b)^4$, gdje je $a = b = 1$.

Ako na abscisi označimo 5 jednako udaljenih točaka i na njih nanesemo frekvenciju, i onda te točke frekvencije međusobno povežemo krivuljom, dobivamo m o d i f i k a c i o n u ili v a r i j a c i o n u k r i v u l j u. (Sl. 1).



Sl. 1.

Što je veći broj individua ili varijanata, ta se krivulja sve to više približuje binominalnoj krivulji konstruiranoj iz formule $(a + b)^n$ gdje je $a = b = 1$ dakle:

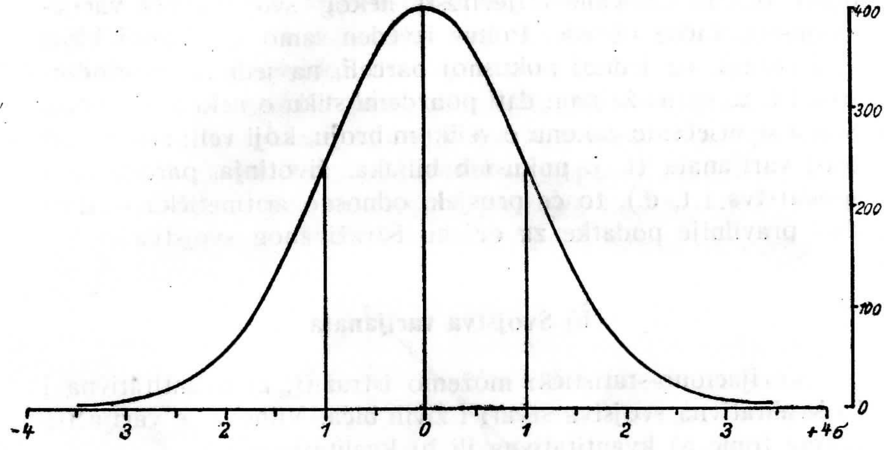
$(a+b)^1 = a+b$ . . . . $1+1$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ . . . . $1+2+1$

$(a+b)^3 = a^2+3a^2b+3ab^2+b^3$ . . . . $1+3+3+1$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ . . . . $1+4+6+4+1$

Kad je $n = \infty$, onda varijaciona krivulja prelazi u n o r m a l n u, G a u s s o v u, Q u e t e l e t o v u, i d e a l n u ili b i n o m i n a l n u k r i v u l j u (Sl. 2.). Ovu krivulju možemo konstruirati po formuli: $y = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$



Sl. 2.

y je u našem slučaju visina krivulje kod udaljenosti **x** od sredine krivulje; σ je konstanta za širinu krivulje.

Budući da se utjecajem vanjskih i unutarnjih faktora života pojedina svojstva organizma mijenjaju u izvjesnim granicama, potrebno je, da bismo mogli procijeniti ta svojstva, naći njihovu p r o s j e č n u v r i j e d n o s t ili a r i t m e t i č k u s r e d i n u i granice njihova varijabiliteta.

U našem radu i nastojanjima oko unapređenja poljoprivrede naći ćemo se pred čitavim nizom takvih problema, koje treba varijaciono-statistički obraditi i proučiti i to na području biljne proizvodnje, živinogojstva, gospodarske uprave i t. d.

Treba na pr. pronaći, koja domaća ili oplemenjena sorta neke vrste biljke najbolje odgovara izvjesnim klimatskim i edafskim prilikama, ili koje su pasmine pojedinih vrsta domaćih životinja po kvaliteti i kvantiteti svojih produkata najbolje za izvjesno proizvodno područje ili koja je obrada tla najbolja, kako treba gnojiti izvjesno polje, koja je najbolja dubina i gustoća sjetve, kakav je plodored najbolji, odnosno najbolja obrada tla za vrijeme rasta pojedinih vrsti i sorata bilja, kakvo je drža-

nje i kakva je hranidba pojedinih pasmina domaćih životinja najbolja i t. d.

Želimo li pokusom dobiti valjane zaključke, treba primijeniti ispravnu metodiku i tehniku pokusa. Ne možemo zamisliti pravu ocjenu brojčane vrijednosti nekog svojstva bez varijaciono-statističke obrade. Pokus izveden samo na jednoj biljci ili životinji, na jednoj pokusnoj parceli, na jednom gospodarstvu i t. d. ne može nam dati pouzdanu sliku o nekom svojstvu. Stoga se utječemo zakonu o velikom broju, koji veli: što je veći broj varijanata (t. j. pokusnih biljaka, životinja, parcela, gospodarstva i t. d.), to će prosjek, odnosno aritmetička sredina dati pravilnije podatke za ocjenu istraživanog svojstva.

b) **Svojstva varijanata**

Varijaciono-statistički možemo istražiti: a) kvantitativna i b) kvalitativna svojstva stvari i živih bića. Njihova je varijacija prema tome a) kvantitativna ili b) kvalitativna.

Pojedine pokusne životinje, biljke, parcele, gospodarstva i t. d., na kojima proučavamo neko svojstvo, zovemo varijantama. Prema tome, da li proučavamo kvantitativna ili kvalitativna svojstva, dijelimo i varijante na kvantitativne i kvalitativne.

Kvantitativne varijante dijelimo na dvije glavne skupine i to na:

a) cijele (diskretne) i b) razredne varijante.

Cijele (diskretne) su varijante one, kod kojih možemo istraživano svojstvo izraziti cijelim brojem, kao na pr. broj vlati na biljci, broj klasića ili zrna na klasu, broj mahuna na biljci, broj sjemena u mahuni i t. d.

Razredne varijante su pak one, kojih svojstvo ne možemo izraziti cijelim brojem. To redovno biva kad istražujemo dimenzije, težinu, kemijski sastav i sl. pojedinih individua odnosno njihovih organa. U razredne varijante ubrajamo na pr. duljinu klasa, težinu zrna na klasu, količinu priroda po hektaru, količinu mlijeka, koju pojedine krave daju u jednom danu ili godini, visinu i težinu životinje, debljinu što je ima nit vune i t. d.

c) **Valjanost biometričkih istraživanja**

Iz rezultata, dobivenih biometričkom obradbom, možemo samo onda izvesti valjane zaključke, ako je:

a) uzorak tipičan za materijal, koji treba obraditi,

b) broj varijanata, koje nam valja istražiti, dovoljno velik (zakon o velikom broju),

c) materijal genetski jednoličan; naprotiv smjesa različnih sorata (genotipova), zatim smjesa sjemena istog genotipa ali proizvedenog na različitim tlima ili u različitim godinama; kod životinja pripadnici različitih pasmina ili iste pasmine ali različite starosti, težine i dr. manje su podesan materijal za varijaciono-statistička istraživanja.

Koliko ćemo pokusnih biljaka, životinja, parcelica ili gospodarstava uvrstiti u pokus, da dobijemo valjane rezultate, zavisi o tome, kako jako varira svojstvo, koje proučavamo: ako varira jače, treba uzeti više varijanata, varira li slabije, dostajat će i manji broj.

Broj varijanata potrebnih za pokus zavisi i o tome, u kojoj mjeri moraju biti rezultati precizni. O tome će još kasnije biti govora.

B. BIOMETRIČKA ISTRAŽIVANJA KVANTITATIVNIH SVOJSTAVA

U poljoprivredi su od naročite važnosti kvantitativna svojstva bilja i životinja, stoga treba njihovu varijaciono-statističkom proučavanju posvetiti naročitu pažnju. Na različnim ćemo primjerima vidjeti, koje vrijednosti treba izračunati, da bismo neko svojstvo pravilno i točno ocijenili.

B-1. BIOMETRIKA VARIJACIJE

a) Varijacioni red

α) Da istražimo duljinu klipa naše domaće sorte kukuruza Hrvatice, izmjerit ćemo duljinu od kojih 50 primjeraka. Najmanji je klip dug 16.2 cm, a najdulji 23.7 cm.

Kad duljine klipova poredamo u skupine ili razrede s razmakom ili a r e a l o m od, recimo, 1 cm, dobit ćemo slijedeću podjelu v a r i j a n a t a nazvanu v a r i j a c i o n i r e d :

Tab. II.

	D u l j i n a k l i p a u c m								
	16 — 17	— 18	— 19	— 20	— 21	— 22	— 23	— 24	
	16.3	17.4	18.1	19.2	20.1	21.2	22.1	23.3	
	16.7	17.5	18.3	19.3	20.3	21.4	22.3	23.7	
		17.7	18.4	19.3	20.3	21.5	22.4		
		17.9	18.6	19.4	20.4	21.6	22.6		
			18.7	19.5	20.5	21.7	22.8		
			18.7	19.5	20.6	21.7			
			18.8	19.6	20.6	21.8			
				19.7	20.7	21.8			
				19.7	20.8				
				19.8	20.8				
				19.8					
				19.9					
Ukupno	2	4	7	12	10	8	5	2	n = 50

Srednji razredi imaju najviše varijanata, a na ekstremne razrede lijevo i desno otpao je najmanji broj.

β) Drugi primjer: na jednoj čistoj liniji (genotipu) Šomotske pšenice-golice istraživala se prosječna duljina 400 klasova s glavnih vlati. (Čista linija je potomstvo jedne homocigotne biljke nastale autogamnom k o n j u g a c i j o m). Najmanji je klas dug 6.3 cm, najdulji 14.7 cm. Kad dobivene duljine svih 400 klasova poredamo u skupine ili razrede s izvjesnim razmakom (arealom) na pr. od 0.5 cm, dobijemo slijedeći varijacioni red:

Tab. III.

Duljina klasa u cm (A)	6—6.5	6.5—7	7—7.5	7.5—8	8—8.5	8.5—9	9—9.5	9.5—10	10—10.5	10.5—11	11—11.5	11.5—12	12—12.5	12.5—13	13—13.5	13.5—14	14—14.5	14.5—15
Broj varijanata u pojedinim razredima (frekvencija) p	3	8	12	23	27	39	48	56	45	37	26	21	18	14	10	7	4	2

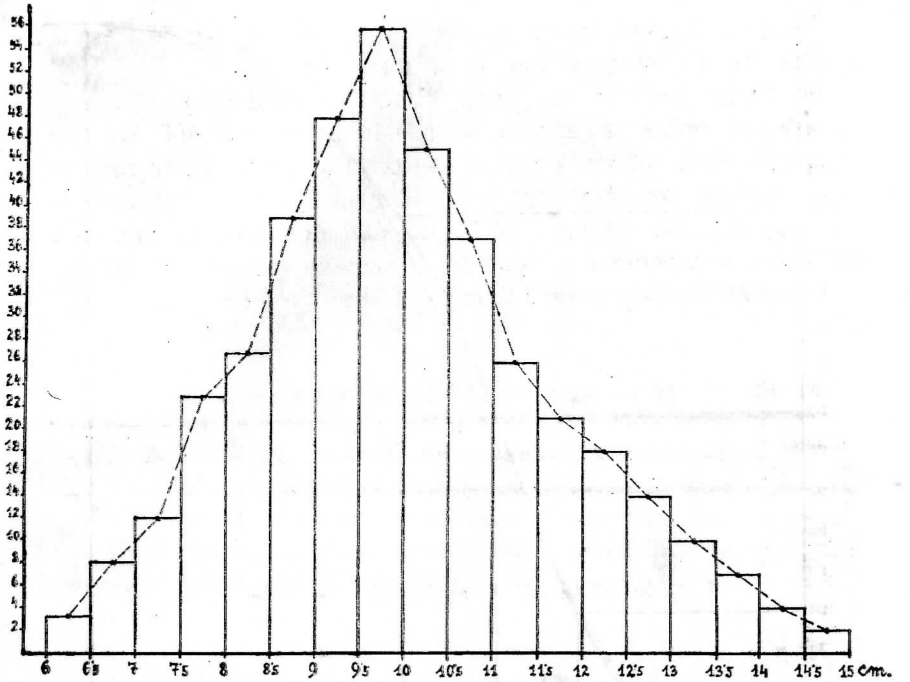
Granica razreda	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15
Suma frekvencija do granica razreda	0	3	11	23	46	73	112	160	216	261	298	324	345	363	377	387	394	398	400

Kao apsolutnu vrijednost svakog pojedinog razreda uzimamo kod razrednih varijanata sredinu razreda. Na pr. apsolutna vrijednost razreda 9.5—10 cm jest v = 9.75 cm.

b) Grafički prikaz podjele varijanata

Predočimo li rezultate gornjih istraživanja tako, da na apscisi označimo granice pojedinih razreda, a na ordinati frekvenciju varijanata, pa onda te točke spojimo, dobit ćemo s t e p e n a s t i p o l i g o n (sl. 3 puna linija). Ako na apscisu nanesemo točke za apsolutnu vrijednost razreda, a na njihove ordinate frekvencije, i potom te točke spojimo crtom, dobit ćemo v a r i j a c i o n i ili f r e k v e n c i o n i p o l i g o n (sl. 3, iscrtkana linija). Spojimo li spomenute točke krivuljom, nastaje v a r i j a c i o n a k r i v u l j a.

Podjelu varijanata u varijacionom redu možemo prikazati i pomoću s u m a r n o g p o l i g o n a. Zato treba da u varija-



Sl. 3.

cionom redu sumiramo varijante od razreda do razreda tako, da broju varijanata u jednom razredu pribrojimo broj varijanata svih prijašnjih razreda, kako je to prikazano na tab. III. na str. 18. Ako sumarne frekvencije za svaki razred posebno nanesemo na ordinate razrednih granica, i potom ove točke spojimo crtom, dobit ćemo s u m a r n i p o l i g o n. (Sl. 4. puna linija).

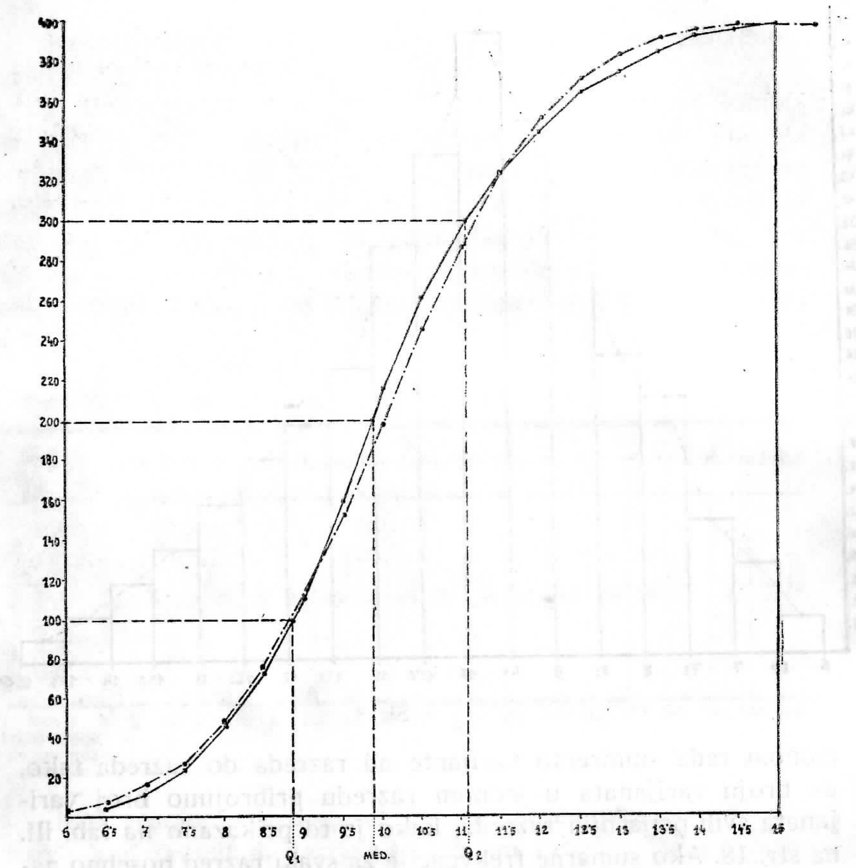
B I O M E T R I Č K E V R I J E D N O S T I

Prve i najvažnije statističke vrijednosti, koje moramo izračunati za svako svojstvo jesu a p s o l u t n a v r i j e d n o s t s v o j s t v a i v a r i j a b i l i t e t s v o j s t v a.

I. APSOLUTNA VRIJEDNOST SVOJSTVA

Apsolutnu vrijednost svojstva može donekle karakterizirati vrijednost zvana m e d i j a n a, a precizno mjerilo je a r i t m e t i č k a s r e d i n a ili s r e d n j a v r i j e d n o s t.

*



Sl. 4.

1. M e d i j a n a — M e d

Za karakteristiku prosječne vrijednosti nekog svojstva upotrebljavala se prije vrijednost m e d i j a n a — Med. Danas se ona za tu svrhu rijetko upotrebljava, ali jer ćemo je trebati kod izračunavanja nekih drugih važnih varijaciono-statističkih vrijednosti, treba da se s njom već sada upoznamo.

Medijana je u varijacionom redu apsolutna vrijednost srednje varijante. Ako na pr. u varijacionom redu za duljinu klasa u našem primjeru s pšenicom (str. 18) ima n = 400 varijanata, onda je medijana apsolutna vrijednost 200-te varijante toga reda. Ovu vrijednost izračunamo ovako:

Do razredne granice 9.5 cm ima ukupno 160 varijanata, a do razredne granice 10 cm ima ih 216 (vidi str. 18. Tabl. III.). Prema tome se mora medijana ili 200-ta varijanta nalaziti u razredu između 9.5 i 10 cm. Kako je razredni razmak ili areal (a) između 10 — 9.5 cm = 0.5 cm, i u njemu ima 56 varijanata, to na 200 — 160 = 40 varijanata otpada $\frac{0.5 \times 40}{56} = 0.357$ cm.

Dakle je vrijednost srednje varijante našeg varijacionog reda t. j. Med = q_2 = 9,5 + 0,357 = 9,857 cm. (sl. 4.).

2. S r e d n j a v r i j e d n o s t — M

Mnogo točnije karakterizira apsolutnu vrijednost nekog svojstva njegova srednja vrijednost, koju označujemo slovom **M.**

Prosječna ili srednja vrijednost je aritmetička sredina, koju dobijemo, ako zbroj vrijednosti pojedinih mjerenja (V) podijelimo s brojem varijanata (n).

$$M = \frac{\Sigma V}{n}$$

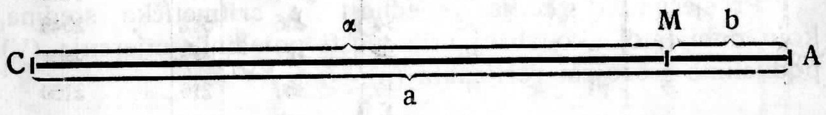
gdje Σ znači sumu, V apsolutnu duljinu pojedine varijante, a n ukupni broj svih varijanata. U varijacionom redu za duljinu kukuruznog klipa n = 50.

Ima i drugi način, kako se izračunava srednja vrijednost: U varijacionom redu u tab. III. smjestili smo klasove duljine 6 do 6.5 cm u prvu skupinu ili razred, klasove s duljinom 6.5 do 7 cm u drugu skupinu i t. d. Za razredni razmak ili a r e a l uzeli smo 0.5 cm. Veličinu tog razmaka određujemo već prema varijacionoj širini i karakteru istraživanog svojstva. Varijaciono-statističke vrijednosti su dakako to točnije, što je razredni razmak manji. U praksi se radi obično sa 8 do 12 razreda.

Broj varijanata u jednom varijacionom razredu zovemo razrednom f r e k v e n c i j o m. Iz varijacionog razreda izračunat ćemo s r e d n j u v r i j e d n o s t (M) tako, da svaku pojedinu apsolutnu vrijednost razreda (v) pomnožimo s odgovarajućom razrednom frekvencijom (p), a zbroj (Σ) ovih produkata podijelimo sa zbrojem svih varijanata (n). U tom slučaju glasi formula za srednju vrijednost $M = \frac{\Sigma p v}{n}$

Za izračunavanje srednje vrijednosti upotrebljavamo u praksi najčešće slijedeći način:

Kao polaznu točku **A** (aproksimativnu srednju vrijednost) uzimamo apsolutnu vrijednost ma kojeg razreda, ali obično vrijednost onoga razreda, u kome se otprilike može očekivati srednja vrijednost. Za apsolutnu vrijednost razreda uzima se u praksi redovno sredina razreda. U našem primjeru za duljinu klasa (Tab. III.) uzet ćemo za **A** apsolutnu vrijednost varijacionog razreda **10 — 10.5** cm, t. j. sredinu toga razreda, dakle 10.25 cm. **A** će vjerojatno biti nešto veća ili nešto manja od prave srednje vrijednosti **M**. Između **A** i **M** bit će neka razlika, koju ćemo označiti sa **b**. Prema tome je: $\mathbf{M} = \mathbf{A} \pm \mathbf{b}$. Ako dakle označimo na pr. udaljenost varijante **C** od aproksimativne srednje vrijednosti **A** sa **a**, udaljenost **A** od **M** sa **b** i razmak između **M** i **C** sa α (alfa), onda je $\mathbf{a} = \alpha + \mathbf{b}$. To se vidi i na slijedećoj skici:



Ako obje strane jednadžbe $a = \alpha + b$ pomnožimo sa Σp t. j. sa sumom (Σ) pojedinih razrednih frekvencija (p) izlazi:

$$\Sigma pa = \Sigma\, p\alpha + \Sigma pb$$

$\Sigma p \,.\, \alpha$ je zbroj udaljenosti pojedinih varijanata od srednje vrijednosti. Ova je suma uvijek jednaka ništici. To se najbolje vidi na ovom primjeru: Srednja vrijednost (aritmetička sredina) brojeva: 21, 22, 25 i 28 jest 24. Ona je za — 3, — 2, + 1 i + 4 manja odnosno veća od brojeva, koji čine aritmetičku sredinu. Suma ovih razlika je ništa. Iz toga slijedi, da je i u našem slučaju $\Sigma p\alpha = 0$, tako da je $b = \frac{\Sigma pa}{\Sigma p}$, budući da je Σp suma sviju frekvencija u varijacionom redu ujedno zbroj svih varijanata toga reda, dakle **n**, slijedi da je $b = \frac{\Sigma pa}{n}$. Budući da se u praksi, zbog lakšeg računanja, radi najprije sa **a** kao jedinicom razrednog areala, mora se **b** pomnožiti još sa apsolutnom vrijednošću tog areala. Dakle konačna formula, po kojoj se računa srednja vrijednost, glasi:

$$M = A + ab = A + a\frac{\Sigma pa}{n}$$

a) Srednja vrijednost razrednih varijanata

U našem primjeru za duljinu klasa pšenice izabrali smo kao polaznu točku A (aproksimativnu srednju vrijednost) apsolutnu vrijednost razreda 10 — 10.5 cm. Sredina toga razreda je A = 10.25. Ostali razredi imaju razredni razmak (areal = a) za 1 × 0.5, 2 × 0,5, 3 × 0.5 cm i t. d. pozitivno ili negativno od A.

Sve brojke potrebne za izračunavanje srednje vrijednosti možemo poredati tako, kako je prikazano u tab. IV.

Tab. IV.

Razredni razmak (areal) a + ili — od A	p	pa	a^2	p a^2	a^3	pa^3
9	2	18	81	162	729	1458
8	4	32	64	256	512	2048
7	7	49	49	343	343	2401
6	10	60	36	360	216	2160
5	14	70	25	350	125	1750
4	18	72	16	288	64	1152
3	21	63	9	189	27	567
2	26	52	4	104	8	208
1	37	37	1	37	1	37
A 0	45	0	0	0	0	0
— 1	56	— 56	1	56	1	— 56
— 2	48	— 96	4	192	8	— 384
— 3	39	— 117	9	351	27	— 1053
— 4	27	— 108	16	432	64	— 1728
— 5	23	— 115	25	575	125	— 2875
— 6	12	— 72	36	432	216	— 2592
— 7	8	— 56	49	392	343	— 2744
— 8	3	— 24	64	192	512	— 1536
		+ 453 — 644 Σpa = — 191		Σpa^2 = 4711		+ 11781 — 12968 Σpa^3 = — 1187

$$b = \frac{\Sigma pa}{n} = -\frac{191}{400} = -0,4775$$

a = 0,5

Srednja je vrijednost:
M = A + a b = 10.25 + 0.5(—0.4775) = 10.01125 cm ili okruglo 10.01 cm, t. j. prosječna je duljina klasa spomenute čiste linije Šomotske pšenice 10.01 cm.

Kraći način za izračunavanje Σ (pa) je ovaj: (Tab. V.)

(Tabela je proširena rubrikama, koje služe za izračunavanje i drugih varijaciono-statističkih vrijednosti). Za izračunavanje srednje vrijednosti odnosno Σ (pa) služe nam horizontalne rubrike od 4 do 8).

Tab. V.

Rubrika											
1	a^4		1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
2	a^3		1	8	27	64	125	216	343	512	729
3	a^2		1	4	9	16	25	36	49	64	81
4	areal = a		1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	frekvencija p	+	37	26	21	18	14	10	7	4	2
6		—	56	48	39	27	23	12	8	3	—
7	diferencija frekvencije	+	—	—	—	—	—	—	—	1	2
8		—	19	22	18	9	9	2	1	—	—
9	Sume frekvencija		93	74	60	45	37	22	15	7	2

pozitivni produkti (rubrika 7 i 4)

(p a)	
1 · 8	8
2 · 9	18
Ukupno	26

negativni produkti (rubrika 8 i 4)

(p a)	
19 · —1	— 19
22 · —2	— 44
18 . —3	— 54
9 · —4	— 36
9 · —5	— 45
2 · —6	— 12
1 · —7	— 7
Ukupno	—217

Σ (pa) = — 217 + 26 = — 191

Kontrolu vršimo na različne načine: a) da ponovimo račun, b) da račun izvedemo s koje druge polazne točke za **A** (aproksimativne srednje vrijednosti) i c) Charlierovom metodom.

Ova je metoda radi svoje jednostavnosti naročito prikladna. Za novu polaznu točku A_1 izabere se ona, koja je za jedan areal manja od pređašnje **A**. Polaznoj točci **A** odgovara $b = \frac{\Sigma pa}{n}$, a polaznoj točci A_1 odgovara $b_1 = \frac{\Sigma p(a+1)}{n}$. Za kontrolu je dovoljno da izračunamo

$$\Sigma[p(a+1)] = \Sigma pa + \Sigma p = \Sigma pa + n$$

Ako je dakle nova polazna točka (aproksimativna srednja vrijednost) duljine klasa: A_1 = 9.75 cm, onda je:

Tab. VI.

a		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	+	45	37	26	21	18	14	10	7	4	2
	—	48	39	27	23	12	8	3	—	—	—
dif.	+	—	—	—	—	6	6	7	7	4	2
	—	3	2	1	2	—	—	—	—	—	—

Iz gornje tabele proizlazi:

6· 5	30
6· 6	36
7· 7	49
7· 8	56
4· 9	36
2·10	20
	227

— 3·1	— 3
— 2·2	— 4
— 1·3	— 3
— 2·4	— 8
	— 18

Dakle: $\Sigma p(a+1) = \Sigma pa + n$ = 227 — 18 = 209 = —191 + 400

Osim metode množenja, kojom se izračunava Σpa postoji još i metoda zbrajanja, koja se jako malo upotrebljava, pa je zato ne ćemo ni primijeniti.

b) Srednja vrijednost cijelih (diskretnih) varijanata

C i j e l e ili d i s k r e t n e varijante su, kako znamo, one kod kojih se vrijednost svojstva može izraziti cijelim brojem. Tako na pr. broj klasića na klasu spada u skupinu diskretnih varijanata.

U spomenutoj već čistoj liniji Šomotske pšenice-golice istraživano je osim duljine klasa i broj klasića na klasovima glavnih vlati. Najmanji broj klasića je u toj liniji 11, a najveći 25 (varijaciona je širina 25—11=14 klasića). Ako za razredni razmak (areal = a) uzmemo, da je a = 1 (klasić), onda je varijacioni red slijedeći:

Tab. VII.

Broj klasića	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Ukupno varijanata
Razredna frekvencija	3	10	16	28	41	59	57	49	38	29	25	19	15	7	4	400
								A								

Srednju vrijednost broja klasića izračunamo na ovaj način:

Za polaznu točku (aproksimativnu srednju vrijednost A) uzmemo na pr. razred, u kojemu 49 klasova ima po 18 klasića, dakle A = 18. (Kao A možemo dakako upotrebiti apsolutnu vrijednost ma kojega razreda.)

Prema tome bi onda tab. VIII. za izračunavanje srednje vrijednosti po skraćenoj metodi bila ovakova: (tabela VIII. je proširena za izračunavanje i drugih različnih statističkih vrijednosti).

Tab. VIII.

Rubrika									
1		a^3	1	8	27	64	125	216	343
2		a	1	2	3	4	5	6	7
3	Frekvencija (p)	+	38	29	25	19	15	7	4
4		—	57	59	41	28	16	10	3
5	Diferencija (p)	+	—	—	—	—	—	—	1
6		—	19	30	16	9	1	3	—
7	Suma (p)		95	88	66	47	31	17	7
8		a^2	1	4	9	16	25	36	49
9		a^4	1	16	81	256	625	1296	2401

pozitivni produkti (rubrike 5 i 2) (p·a)	negativni produkti (rubrike 6 i 2) (p·a)
1 . 7 = 7	19 . —1 = — 19
	30 . —2 = — 60
	16 . —3 = — 48
	9 . —4 = — 36
	1 . —5 = — 5
	3 . —6 = — 18
	Ukupno —186

$$pa = -186 + 7 = -179$$

$$b = \frac{-179}{400} = -0.4475$$

M = A + ab = 18 + 1 (—0.4475) = 17,5525 ili okruglo 17,6.

Dakle srednja je vrijednost za broj klasića M = 17.6 klasića na klasu.

II. RAČUNANJE VARIJABILITETA

Za točnu ocjenu nekog svojstva treba da znamo njegovu srednju vrijednost i njegov varijabilitet. Dvije sorte pšenice ili dvije pasmine goveda, koje imaju na pr. istu srednju vrijednost za neko svojstvo, nemaju jednaku gospodarsku vrijednost, ako je varijabilitet toga svojstva kod jedne sorte ili pasmine veći, a kod druge manji. Što je varijabilitet kod neke sorte gospodarske biljke ili neke pasmine domaćih životinja i sl. veći, to je ta sorta ili pasmina slabija. Za mjerenje varijabiliteta služe ove vrijednosti:

1. Varijaciona širina — Vš

Varijabilitet nekog svojstva možemo približno mjeriti pomoću varijacione širine. Pod varijacionom širinom razumijevamo razliku između apsolutne vrijednosti svojstva najveće i najmanje varijante. Na pr. između 50 klipova gore spomenutog kukuruza Hrvatice, najmanji (min.) je klip bio dug 16.2 cm, a najdulji (max.) 23.7 cm. Varijaciona je širina prema tome Vš = max. — min. = 23.7 — 16.2 = 7.5 cm. Od 400 klasova Šomodske pšenice-golice najmanji je bio dug 6.3 cm, a najveći 14.7 cm, dakle je varijaciona širina za duljinu klasa Vš = 14.7 — 6.3 = 8.4 cm, a budući da je najmanji broj klasića između 400 klasova bio 11, a najveći 25, to je Vš = = 25 — 11 = 14 klasića varijaciona širina. (Str. 26, tab. VII.).

2. Kvartil — Q

Kvartil je vrijednost, koja rezultira iz diferencije između apsolutne vrijednosti (q_3) zadnje varijante u trećoj četvrtini varijacionog reda i (q_1) apsolutne vrijednosti zadnje varijante prve četvrtine varijacionog reda, podijeljenom sa 2, dakle $Q = \frac{q_3 - q_1}{2}$.

U našem primjeru s duljinom klasa pšenice q_3 znači apsolutnu vrijednost 300-te varijante, a q_1 apsolutnu vrijednost 100-te varijante.

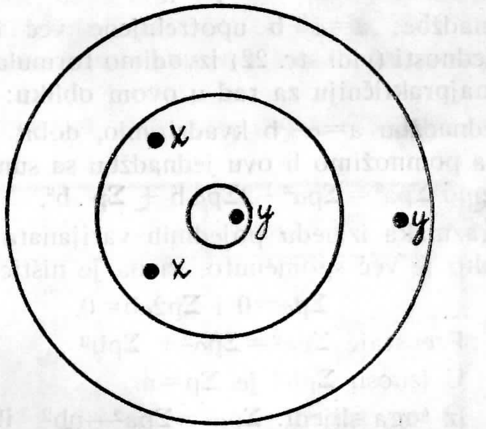
Iz tabele III. na str. 18 i sl. 4 slijedi, da je
$q_1 = 8,5 + 0,346 = 8,846$ cm
$q_3 = 11 + 0,038 = 11,038$ cm, tako da je $Q = \frac{11,038 - 8,846}{2} =$
$= 1,096$ cm. Kvartil je dakle apsolutno mjerilo za varijabilitet svojstva, ali nije točno, nego tek aproksimativno, jer obuhvaća svega 50% varijanata i to onih iz sredine varijacionog reda.

U normalnoj je krivulji Q = 0.6745 σ. U toj formuli je σ standardna devijacija.

3. Standardna devijacija — σ

Varijabilitet nekog svojstva najbolje se mjeri pomoću standardne devijacije (σ). Standardna devijacija se temelji na metodi najmanjih kvadrata. Principe, po kojima ovom metodom izračunavamo varijabilnost svojstva, upoznat ćemo najbolje na slijedećem primjeru:

Dva lovca X i Y natječu se, koji će bolje pogoditi cilj. Svaki gađa dvaput. Lovac X je oba puta pogodio u 2. krug cilja, a lovac Y pogodio je najprije u 1., a onda u 3. krug. Pita se, koji je od ove dvojice bolji strijelac? (Sl. 5.).



Sl. 5.

Ako zbrojimo rezultate gađanja lovca X, dobit ćemo 2+2=4, a rezultate lovca Y: 1+3=4. To bi značilo, da su obojica jednako dobri strijelci. Ipak je X trebao manju ukupnu površinu da pogodi cilj nego li Y.

Površina kruga je $r^2\pi$. Lovac X pogodio je površinu od $2\pi(2)^2$, a lovac Y od $\pi(1)^2+\pi(3)^2$. Prema tome su ove dvije površine u relaciji 8 : 10.

Još ćemo bolje ocijeniti streljačku vještinu obaju lovaca, ako se poslužimo brojkom, koju smo dobili iz drugog korijena sume kvadrata, sastavljenih od udaljenosti pogodaka od cilja prvog i drugog gađanja lovca X, odnosno lovca Y.

Na taj način dobivamo slijedeće ocjene:

$$\text{lovac X} \ldots \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2.83$$

$$\text{,, Y} \ldots \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3.16$$

a to znači, da je varijabilitet u gađanju kod lovca X manji (2.83) nego kod lovca Y (3.16), te je prema tome X bolji strijelac nego Y.

Dakle varijabilitet pojedinih svojstava možemo najbolje izraziti pomoću drugog korijena iz sume kvadratnih udaljenosti $(\alpha)^2$ pojedinih varijanata od srednje vrijednosti, podijeljene s brojem varijanata (n). Prema tome je opća formula za određivanje varijabiliteta svojstva ili standardne devijacije σ ova:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma p \alpha^2}{n}}$$

Iz jednadžbe: $a=\alpha+b$ upotrebljene već kod računanja srednje vrijednosti (vidi str. 22) izvodimo formulu za standardnu devijaciju, najpraktičniju za rad u ovom obliku:

Ako jednadžbu $a=\alpha+b$ kvadriramo, dobit ćemo $a^2=\alpha^2+ +2\alpha b+b^2$, a pomnožimo li ovu jednadžbu sa sumom varijanata Σp, dobit ćemo $\Sigma pa^2 = \Sigma p\alpha^2 + 2\Sigma p\alpha\, b + \Sigma p \,.\, b^2$.

Suma razmaka između pojedinih varijanata i srednje vrijednosti, kako je već spomenuto, ravna je ništici. Zato je:

$$\Sigma p\alpha=0 \text{ i } \Sigma p2\alpha b=0.$$

Preostaje $\Sigma pa^2=\Sigma p\alpha^2+ \Sigma pb^2$

U iznosu Σpb^2 je $\Sigma p=n$.

Iz toga slijedi: $\Sigma p\alpha^2=\Sigma pa^2-nb^2$ ili

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma p \alpha^2}{n} = \frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2$$

Tamo gdje je areal a=1 računamo standardnu devijaciju po formuli: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2}$

Ako je areal (a) veći ili manji od 1, moramo σ pomnožiti još s apsolutnom vrijednošću areala, dakle sa **a**.

Opća formula za standardnu devijaciju, koja vrijedi za sve vrijednosti areala onda je slijedeća: $\sigma = a\sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2}$.

Primjenu te formule prikazat ćemo na našem već spomenutom uzorku pšenice.

a) Standardna devijacija razrednih varijanata

U varijacionom redu za duljinu klasa pšenice tab. III., str. 18 pošli smo od aproksimativne srednje vrijednosti A=10.25 cm. Ovom vrijednošću služit ćemo se i kod računanja standardne devijacije.

Vrijednosti **a**, **b** i **n** poznate su nam još od izračunavanja srednje vrijednosti. One su: a=0.5, b=—0.4774, n=400; Σpa^2= =4711 izračunat ćemo iz tab. IV. ili V. na str. 23 i 24.

Po metodi množenja tab. V. zbrajamo frekvencije (p) razreda, koji su u pozitivnom i negativnom smjeru od točke **A** udaljeni za: a, 2a, 3a i t. d. U našem je slučaju na pr. frekvencija (p) u razredu za **a** udaljenom od **A** u pozitivnom smjeru 37, a u negativnom 56, dakle 37+56=93. Zatim zbrajamo redom frekvencije u razredima udaljenim za 2a, 3a, 4a i t. d. od A. Svaku od ovih suma pomnožit ćemo onda s kvadratom udaljenosti razreda od A.

Na našem primjeru dobivamo tako slijedeće produkte i sume:

p · a²	p · a²
93 · 1	93
74 · 4	296
60 · 9	540
45 · 16	720
37 · 25	925
22 · 36	792
15 · 49	735
7 · 64	448
2 · 81	162
Σ (p × a²)	4711

Za duljinu klasa je standardna devijacija:

$$\sigma = a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2} = 0{\cdot}5 \sqrt{\frac{4711}{400} - (-0{\cdot}4775)^2} = \pm 1{\cdot}699$$

b) Standardna devijacija cijelih (diskretnih) varijanata

Varijacioni red za cijele varijante, i to broj klasića na klasu, prikazan je u tab. VII. na str. 26.

Za aproksimativnu srednju vrijednost (A) uzeli smo razred, u kojemu ima 49 klasova, svaki sa 18 klasića, tako da je A=18. Standardnu devijaciju izračunavamo i ovdje po formuli:

$$\sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2}$$

S vrijednostima **a, b** i **n** smo se upoznali već kod izračunavanja srednje vrijednosti —**M.** (Vidi str. 26 i 27) i to:

a=1, b=0.4475 i n=400

Σpa^2 izračunavamo iz tab. VIII. ovako: (rubrike 7 i 8).

pa^2	pa^2
95 · 1	59
88 · 4	352
66 · 9	594
47 · 16	752
31 · 25	775
17 · 36	612
7 · 49	343
$\Sigma(pa^2)$	3523

Dakle broj klasića na klasu ima standardnu devijaciju:

$$\sigma = a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2} = \sqrt{\frac{3523}{400} - 0{\cdot}4475^2} = 2{\cdot}934$$

Standardna devijacija izražava apsolutnu varijabilnost istraženog svojstva. Kod normalne krivulje ona označuje one točke krivulje projicirane na apscisu, kod kojih centralna konkavnost prelazi u lateralnu konveksnost (sl. 2.).

Računske operacije kontroliramo i ovdje najbolje Charlierovom metodom na taj način, da za novu polaznu točku odaberemo A_1, koja je za jedan areal manja od A.

Kad radimo s polaznom točkom A, onda je

$$\sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2},$$

a kod operacija sa A_1 je $\sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma p (a+1)^2}{n} - b^2}$.

Za kontrolu nam je dovoljan izraz:

$$\Sigma p(a+1)^2 = \Sigma pa^2 + 2\Sigma pa + \Sigma p = \Sigma pa^2 + 2\Sigma pa + n$$

Ako je broj varijanata malen dobit ćemo točnije rezultate, poslužimo li se slijedećom formulom za izračunavanje standardne devijacije:

$$\sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n-1} - b^2}$$

Na veličinu standardne devijacije utječe i veličina razrednog razmaka (areala = a). Utvrđeno je, da je standardna devijacija nešto veća, ako su areali veliki, a manja, ako su maleni. To zavisi o podjeli apsolutnih vrijednosti pojedinih varijanata u razredima. U praksi se, zbog jednostavnijeg postupka, uzima apsolutna vrijednost pojedinih razreda, kao da je u sredini razreda, iako to nije uvijek tako. Upravo poradi toga izradio je Amerikanin Sheppard za pravilniju standardnu devijaciju formulu, koja glasi:

$$\sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n} - b^2 - \frac{a^2}{12}} \quad \text{odnosno} \quad \sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma p a^2}{n-1} - b^2 - \frac{a^2}{12}}$$

Od kolike je važnosti standardna devijacija za mjerenje varijabilnosti svojstva, vidi se iz slijedećeg primjera iz prakse: Pomoću sortnog pokusa ustanovili smo, da je na pr. prosječni prirod zrna sorte pšenice **A**, a isto tako i sorte **B**=20.5 q po ha. Standardna devijacija sorte **A** je $\sigma=\pm2.4$, a sorte **B** pak $\sigma=\pm0.7$ q po ha. Iz toga slijedi, da prirod sorte **A** nije tako konstantan kao prirod sorte **B**, a to stoga, što sorta A ima veću varijabilnost u prirodu nego sorta **B.** Sorta **B** je prema tome s gospodarskog gledišta bolja od sorte **A.**

Standardna devijacija služi dakako kao apsolutno mjerilo varijabiliteta.

4. Varijacioni koeficijent — v

Standardna devijacija je apsolutno mjerilo za varijabilitet nekog svojstva.

Da usporedimo, kako jako variraju različna svojstva, moramo upotrebiti neko relativno mjerilo. Takvo je mjerilo varijacioni koeficijent — v. Varijacioni koeficijent izražava standardnu devijaciju u postocima srednje vrijednosti,

dakle: $v = \frac{100\,\sigma}{M}$

U našem je primjeru za duljinu klasa varijacioni koeficijent:

$v = \frac{100 \times 1{,}699}{10{,}01} = 16{,}97$, a za broj klasića na klasu

$$v = \frac{100 \times 2{,}934}{17{,}6} = 16{,}67.$$

Duljina klasova varira dakle nešto jače nego broj klasića.

5. Kvartilni koeficijent — Q_k

Tamo, gdje želimo usporediti varijabilitet različnih svojstava, na pr. duljinu klasa s brojem klasića na klasu pomoću kvartila — Q (vidi str. 28), valja nam upotrebiti neko relativno mjerilo.

U tu nam svrhu služi kvartilni koeficijent - Q_k. Kvartilni koeficijenat izražava kvartil u postocima srednje vrijednosti. Dakle $Q_k = \frac{100\,Q}{M}$.

Za duljinu klasa u našem je slučaju: (str. 29)

$$Q_k = \frac{100 \times 1{,}096}{10{,}01} = 10{,}94.$$

III. SREDNJA I VJEROJATNA POGREŠKA — m i E. P.

Pretpostavimo li, da su srednja vrijednost, standardna devijacija i varijacioni koeficijent izračunati iz prosječnog uzorka i uza sve već spomenute opreze, ipak nas zanima, do koje mjere oni karakteriziraju istraživano svojstvo i do koje je granice moguće njihovom pomoću izvesti valjane zaključke za vrijednost toga svojstva.

Sigurno je, da što više varira materijal koji istražujemo, to je manja vjerojatnost, da će uzorak iz toga materijala — naročito ako je manja količina (mali broj varijanata) — biti prosječan. Velika ili bar veća količina uzoraka (veliki broj varijanata) mogla bi svakako bolje reprezentirati materijal, iz kojega je bila odvojena.

Pomoću standardne devijacije možemo ustanoviti varijabilnost nekog svojstva. Na tab. IX. vidimo, koji se postotak varijanata nalazi u granicama između srednje vrijednosti **M** i multiplog broja od σ.

Tab. IX.

Razmak od srednje vrijednosti $M \pm x\sigma$	% varijanata u granicama $M \pm x\sigma$	% varijanata izvan granica $M \pm x\sigma$
$M \pm 0{\cdot}5\,\sigma$	38·3	61·7
$M \pm 1{\cdot}0\,\sigma$	68·3	31·7
$M \pm 1{\cdot}5\,\sigma$	86·6	13·4
$M \pm 2{\cdot}0\,\sigma$	95·5	4·5
$M \pm 2{\cdot}5\,\sigma$	98·8	1·2
$M \pm 3{\cdot}0\,\sigma$	99·7	0·3

Prema tome se u granicama $M \pm 3\sigma$ nalazi 99.7% svih varijanata teoretskog varijacionog reda, a to znači, da možemo s vjerojatnošću od 99.7% tvrditi, da je srednja vrijednost (M) najviše 3σ udaljena od jedne slobodno izabrane varijante.

Standardna devijacija ima dakle dvostruku važnost i to: 1. kao mjerilo varijabilnosti i 2. kao indicij, na osnovu koga možemo zaključiti iz koje mu drago varijante u varijacionom redu, kolika je srednja vrijednost toga reda.

Da ustanovimo, do koje mjere neka biometrička vrijednost karakterizira neko svojstvo organizma ili mrtve tvari, valja nam izračunati njezinu srednju odnosno vjerojatnu pogrešku.

Srednja i vjerojatna pogreška su mjerila, koja nam kazuju, možemo li dotičnu varijaciono-statističku vrijednost upotrijebiti za izvođenje valjanih zaključaka ili ne možemo.

1. Srednja pogreška — m

a) Srednja pogreška srednje vrijednosti — m_M

Ako je σ_1 pogreška jedne slobodno izabrane varijante, onda je srednja pogreška srednje vrijednosti od **n** varijanata: $m_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ t. j. standardna devijacija dividirana s drugim korijenom od broja svih varijanata.

U našem je primjeru za prosječnu duljinu klasa kod pšenice srednja vrijednost M = 10.01 cm (str. 24), a standardna devijacija $\sigma = \pm$ 1,699 (str. 32).

Prema tome je srednja pogreška srednje vrijednosti:

$$m_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,699}{\sqrt{400}} = 0,085$$

Da prosudimo valjanost srednje vrijednosti — **M** obzirom na njezinu srednju pogrešku, treba pisati: M±m.

Prema tome je u našem slučaju M±m=10.01±0.085.

Srednja vrijednost za broj klasića je u našem primjeru (str. 27) M=17.6 i standardna devijacija $\sigma = \pm 2,934$, tako da je srednja pogreška srednje vrijednosti:

$$m_M = \frac{2,934}{\sqrt{400}} = 0.1467 \text{ odnosno } 0.147$$

Dakle je M±m=17.6±0.147.

Dokazano je da za stvaranje valjanih zaključaka srednja vrijednost M mora biti veća od trostruke srednje pogreške — 3m.

α) Granice biometrički opravdane srednje vrijednosti

Srednja pogreška **m** označuje nam granice, u kojima se kreće srednja vrijednost **M** izračunata od **n** varijanata.

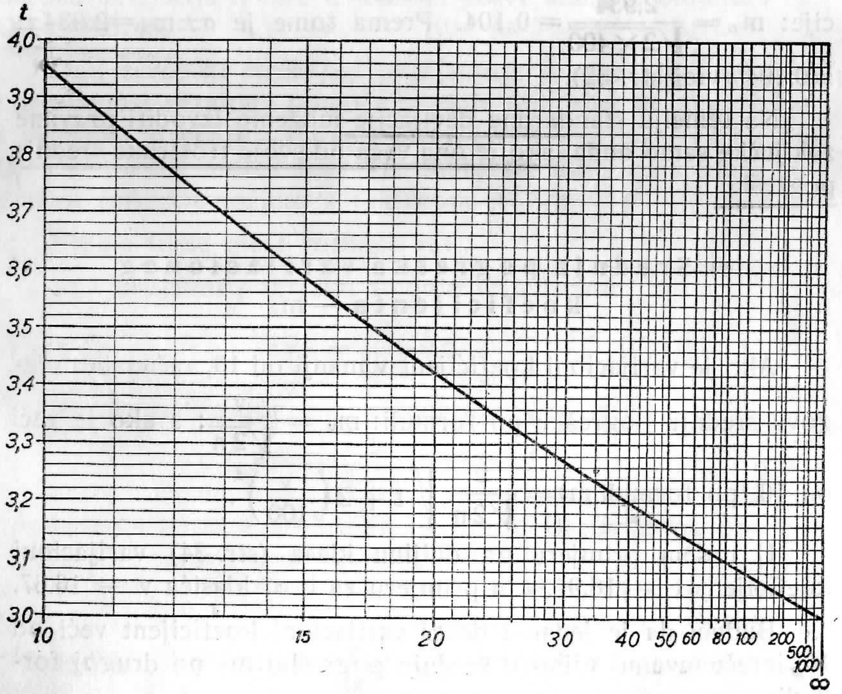
Ako je broj varijanata **n** velik, onda su granice točnosti, odnosno dopuštene pogreške srednje vrijednosti u pozitivnom i negativnom smjeru od »M« jednake trostrukoj srednjoj pogrešci (3m) srednje vrijednosti. Ako je broj varijanata malen netočnost se povećava.

U donjoj su tabeli (tab. X.) prikazane granice točnosti odnosno dopuštene pogreške u umnošku od **m** i to u varijacionom redu sa n—1 do 10 varijanata (n—1 uzima se radi toga, jer srednja vrijednost, izračunana od pojedinačnih mjerenja, ima n—1 neovisnih varijanata, a samo je jedna varijanta ovisna).

Tab. X.

Broj neovisnih varijanata n — 1	Umnožak od m t	Broj neovisnih varijanata n — 1	Umnožak od m t
1	235.8	6	4.9
2	19.21	7	4.53
3	9.22	8	4.27
4	6.62	9	4.09
5	5.51	10	3.96

U Kollerovu diagramu (sl. 6) možemo naći granice točnosti za 10 do ∞ broj varijanata.



Sl. 6.

U našem primjeru za duljinu klasa pšenice, gdje je $n-1 = 400-1=399$ slobodnih varijanata, srednja pogreška srednje vrijednosti (str. 36) $m_M = 0.085$ je $t=3,02$ (vidi Kollerov diagram sl. 6). Prema tome su granice točnosti za duljinu klasa, gdje je srednja vrijednost $M=10,01$ (str. 24) između

$M - tm_M = 10,01 - 3,02 \times 0,085 = 9,753$ i
$M + tm_M = 10,01 + 3,02 \times 0,085 = 10,267$

b) Srednja pogreška standardne devijacije — m_σ

Ovu vrijednost izračunavamo po formuli: $m_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$.

U gore spomenutom našem primjeru s duljinom klasa je (vidi str. 32): $m_\sigma = \frac{1,699}{\sqrt{2 \times 400}} = 0.06$ odnosno $\sigma \pm m_\sigma = 1,699 \pm 0,06$, a za broj klasića na klasu je srednja pogreška standardne devijacije: $m_\sigma = \frac{2,934}{\sqrt{2 \times 400}} = 0,104$. Prema tome je $\sigma \pm m_\sigma = 2,934 \pm \pm 0.104$ (vidi str. 32).

Na temelju standardne devijacije možemo izvoditi pravilne zaključke samo onda, ako je ona veća od svoje trostruke srednje pogreške.

c) Srednja pogreška varijacionog koeficijenta — m_v

Ako je varijacioni koeficijent **v** manji od 10, računamo njegovu srednju pogrešku po formuli: $m_v = \frac{v}{\sqrt{2n}}$; a ako je veći od 10, po formuli $m_v = \frac{v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{v}{100}\right)^2}$.

U našem primjeru za duljinu klasa (str. 34) varijacioni koeficijent $v = 16.97$, a u primjeru za broj klasića $v = 16.67$.

Budući da je jedan i drugi varijacioni koeficijent veći od 10, izračunavamo njihovu srednju pogrešku $\mathbf{m_v}$ po drugoj formuli.

Prema tome je u našem primjeru srednja pogreška varijacionog koeficijenta za duljinu klasa:

$$m_v = \frac{16,97}{\sqrt{2 \times 400}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{16,97}{100}\right)^2} = 0.6169,$$

a za broj klasića: $m_v = \frac{16,67}{\sqrt{2 \times 400}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{16,67}{100}\right)^2} = 0.6054.$

U jednom i drugom primjeru varijacioni koeficijent veći je od svoje trostruke srednje pogreške. Prema tome nam ovi varijacioni koeficijenti mogu poslužiti za pravovaljane zaključke.

2. Vjerojatna pogreška — E. P. (Error probabilis)

Već je spomenuto, da kvartil — Q označuje granice, u kojima se nalazi srednjih 50% svih varijanata izvjesnog varijacionog reda. U takvom varijacionom redu, gdje su varijante razdijeljene točno po binominalnoj formuli, kvartil se i standardna devijacija nalaze u jednom posve stalnom omjeru i to: $Q : \sigma = 0.6745$.

Dok evropski stručnjaci procjenjuju varijaciono-statističku opravdanost rezultata pomoću srednje pogreške **m**, engleski se i američki stručnjaci služe vjerojatnom pogreškom (E. P. = error probabilis). Nju dobivamo tako, da srednju pogrešku (m) pomnožimo s faktorom 0.6745.

Prema tome glase formule za:

a) vjerojatnu pogrešku srednje vrijednosti:

$$EP_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 0,6745,$$

b) vjerojatnu pogrešku standardne devijacije:

$$EP_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} 0,6745$$

c) vjerojatnu pogrešku varijacionog koeficijenta:

$$EP_v = \frac{v}{\sqrt{n}} 0,6745, \quad \text{ako je } v < 10 \text{ i}$$

$$EP_v = \frac{v}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{v}{100}\right)^2} \, 0,6745 \quad \text{ako je } v > 10$$

Na osnovu **M**, σ i **v** možemo donijeti valjane zaključke samo onda, ako su te vrijednosti triput veće od njihovih vjerojatnih pogrešaka.

Za binominalnu krivulju s 10.000 varijanata vjerojatnost, da prava srednja vrijednost (M) leži između multiplih brojeva od vjerojatne pogreške (E), prikazana je u tab. XI.

Tab. XI.

Granice za vjerojatnu pogrešku (EP) od M M ± E. P.	Vjerojatnost
M ± E. P.	1 : 1
M ± 2 E. P.	4,64 : 1
M ± 3 E. P.	22,36 : 1
M ± 4 E. P.	141,87 : 1

Ako je dakle srednja vrijednost (M) tri puta veća od njene vjerojatne pogreške (EP), onda je vjerojatnost 1 : 22,36 da je M varijaciono-statistički opravdana.

Srednju i vjerojatnu pogrešku izražavamo vrlo često i u postocima.

Izračunavanje srednje odnosno vjerojatne pogreške neophodno je potrebno, da ocijenimo, jesu li rezultati, dobiveni različnim pokusima na pr. s prirodom različnih sorata poljoprivrednih biljaka, s gnojivima ili količinom nekog gnojiva, s dobom sjetve, različnim razmacima biljaka u polju, različnim gospodarskim životinjama i t. d. upotrebljivi za valjane zaključke.

Iz rezultata različnih pokusa, objelodanjenih u stručnim časopisima, možemo dobiti tek onda pravu sliku o njihovoj valjanosti, znamo li srednju, odnosno vjerojatnu pogrešku istraženih svojstava.

IV. POREĐENJE VARIJACIONIH REDOVA S TEORETSKOM RASPODJELOM (DISTRIBUCIJOM)

Za točniju ocjenu izvjesnog svojstva treba katkada da podjelu varijanata u varijacionom redu usporedimo s teoretskom t. j. binominalnom raspodjelom varijanata.

To možemo učiniti na dva načina i to:
1. poređenjem brojaka i 2. grafičkim prikazom.

1. **Poređenje brojaka.** Matematičari su izradili tabele, pomoću kojih možemo pronaći, koliko se varijanata od ukupnog broja 10.000 nalazi kod idealne ili binominalne podjele između idealne sredine binominalnog reda i ma kojega razmaka u pozitivnom ili negativnom smjeru od te sredine.

Udaljenost pojedinih varijanata od srednje vrijednosti izražena je u tom slučaju u jedinicama standardne devijacije.

Ako sa D označimo apsolutni razmak izvjesne varijante od srednje vrijednosti, onda je D : σ relativno mjerilo za razmake pojedinih varijanata (σ = standardna devijacija).

Na priloženoj tabeli (vidi tab. XII.) izračunate su vrijednosti za D : σ. Upotrebu ove tabele prikazat ćemo na našem primjeru pšenice za duljinu klasa.

Za duljinu klasa smo već prije izračunali srednju vrijednost: M = 10.01 cm (str. 24), isto tako i standardnu devijaciju σ = + 1,699 (str. 32). Nadalje treba izračunati udaljenost (D) pojedinih razrednih granica od srednje vrijednosti **M**. Do razredne granice 6 cm (str. 18, tab. III.) razmak je od srednje vrijednosti V — M = 6 — 10.01 = — 4.01; razredna granica 6.5 udaljena je od srednje vrijednosti za 6.5 — 10.01 = — 3.51 i t. d. Prema tome je za razrednu granicu 6 omjer: D : σ = = — 4,01 : 1,699 = — 2,3602. Za razrednu granicu 6.5 je omjer D : σ = — 3,51 : 1,699 = — 2,0659 i t. d.

U tab. XII. potražit ćemo za D : σ, koliko varijanata leži između srednje vrijednosti M (razmak je 0) i pojedinih razrednih granica, kad bismo imali 10.000 varijanata. Ove su brojke unesene u rubriku 3 na našoj tabeli br. XIII. Na primjer: za razrednu granicu 8 cm je D : σ = 1,183.

U tab. XII. naći ćemo izvan granica razreda 3749 varijanata za D : σ = 1,15. Interpolacijom izračuna se onda za D : σ=1,183, a to u našem slučaju čini 3815 varijanata.

U koloni 5 tab. XIII. izračunat je teoretski broj varijanata za svaki pojedini razred. Ove brojke dobijemo tako, da u 4. koloni suptrahiramo susjedne brojke u vertikalnom smjeru, dakle za razred 7.5—8 cm broj je varijanata: 3815—3400=485.

Prve susjedne brojke do srednje vrijednosti (M), gdje je razmak 0, treba dakako zbrojiti. U 4. i 5. koloni su brojke preračunate na 10.000 varijanata.

Tab. XII

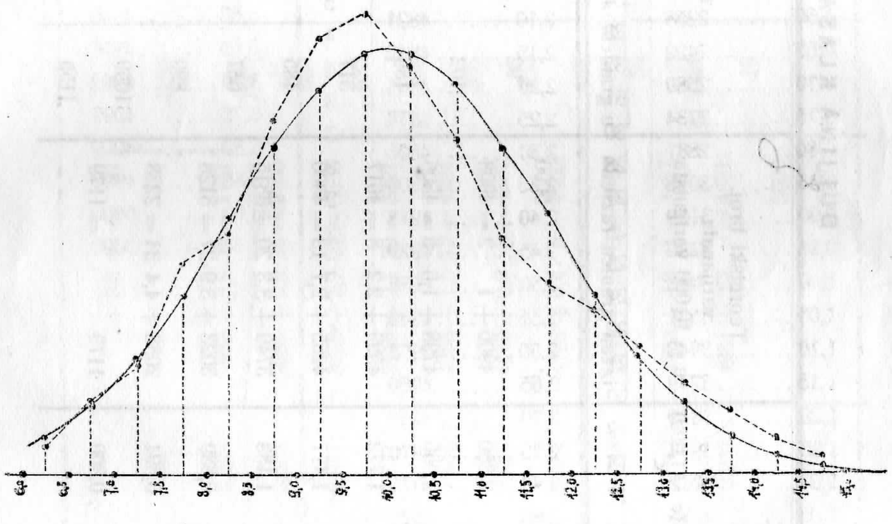
$D:\sigma$ za 10.000 varijanata	Razlika za 0·01	$D:\sigma$ za 10.000 varijanata	Razlika za 0·01	$D:\sigma$ za 10.000 varijanata
0,00 0	40	1,50 4332	12	3,00 4987
0,05 199	40	1,55 4394	11	3,05 4989
0,10 398	40	1,60 4452	11	3,10 4990
0,15 596	39	1,65 4505	10	3,15 4992
0,20 793	39	1,70 4554	9	3,20 4993
0,25 987	38	1,75 4599	8	3,25 4994
0,30 1179	38	1,80 4641	7	3,30 4995
0,35 1368	37	1,85 4678	7	3,35 4996
0,40 1554	37	1,90 4713	6	3,40 4997
0,45 1736	36	1,95 4744	6	3,45 4997
0,50 1915	35	2,00 4773	5	3,50 4998
0,55 2088	34	2,05 4798	5	3,55 4998
0,60 2258	33	2,10 4821	4	3,60 4998
0,65 2422	32	2,15 4842	4	3,65 4999
0,70 2580	31	2,20 4861	3	3,70 4999
0,75 2734	30	2,25 4878	3	3,75 4999
0,80 2881	28	2,30 4893	3	3,80 4999
0,85 3023	27	2,35 4906	2	3,85 4999
0,90 3159	26	2,40 4918	2	3,90 5000
0,95 3289	25	2,45 4929	2	∞ 5000
1,00 3413	24	2,50 4938	2	
1,05 3531	22	2,55 4946	1	
1,10 3643	21	2,60 4953	1	
1,15 3749	20	2,65 4960	1	
1,20 3849	19	2,70 4965	1	
1,25 3944	18	2,75 4970	1	
1,30 4032	17	2,80 4974	1	
1,35 4115	15	2,85 4978	1	
1,40 4192	14	2,90 4981		
1,45 4265	13	2,95 4984		

U 6. koloni je teoretska, a u 7. koloni pokusom dobivena podjela varijanata u varijacionom redu za n = 400 varijanata.

Ako u našem slučaju usporedimo teoretsku podjelu varijanata s podjelom dobivenom iz pokusa vidimo, da između njih nema većih razlika.

2. **Grafički prikaz.** Do koje se mjere podjela varijanata u varijacionom redu eksperimenta slaže s teoretskom, binominalnom podjelom, možemo vidjeti i tako, da tu podjelu prikažemo grafički. To se dade izvesti na nekoliko načina i to u našem primjeru za duljinu pšeničnog klasa:

a) Na apscisu nanesemo granice pojedinih razreda a na ordinate onda pripadajuće frekvencije varijanata i to pokusom dobivene i teoretske (tab. XIII., kolona 7 i 6). Spojimo li linijom najprije jedne, a onda druge tako dobivene točke, vidjet ćemo, do koje se mjere one podudaraju (sl. 7).



Sl. 7.

b) Vrijednosti brojaka dobivenih zbrajanjem frekvencija pojedinih razreda — (vidi str. 18, tab. III. i kolona 9 u tab. XIII.) — nanest ćemo na ordinate (razmak je na apscisi označen jedinicom za razredni areal). Spojimo li točke na ordinatama crtom, dobit ćemo sumarnu krivulju (sl. 4) za duljinu klasa.

Tab. XIII.

DULJINA KLASA

Granice razreda V	$V-M=D$	$D:\sigma$ ($\sigma = 1{,}699$)	Teoretski broj varijanata n = 10.000 varijanata: izvan granica razreda	n = 400: u granicama razreda		Broj varijanata u pokusu p	Broj varijanata do granice razreda u pokusu u %	Broj varijanata do granice razreda u pokusu $\Sigma\ p$	Broj varijanata do granice razreda teoretski $\Sigma\ p$
			5000						
				92	3,68				
6,0	− 4,01	2,360	4906 + 1 · 2 = 4908						3,68
				102	4,08	3	0,75		
6,5	− 3,51	2,066	4798 + 1,6 · 5 = 4806					3	7,76
				189	7,56	8	1,75		
7,0	− 3,01	1,772	4599 + 2,2 · 8 = 4617					11	15,32
				317	12,68	12	5,75		
7,5	− 2,51	1,477	4265 + 2,7 · 13 = 4300					23	28,00
				485	19,40	23	11,50		
8,0	− 2,01	1,183	3749 + 3,3 · 20 = 3815					46	47,40
				687	27,48	27	18,25		
8,5	− 1,51	0,889	3023 + 3,9 · 27 = 3128					73	74,88
				890	35,60	39	28,00		
9,0	− 1,01	0,594	2088 + 4,4 · 34 = 2238					112	110,48
				1059	42,36	48	40,00		
9,5	− 0,51	0,300	1179 = 1179					160	152,84
				1155	46,20	56	54,00		
10,0	− 0,01		+ 0,6 · 40 = 24					216	199,04
$M = 10{,}01$				1155	46,20	45	65,25	261	245,24
10,5	0,49	0,288	987 + 3,8 · 38 = 1131						
				1069	42,76	37	74,50	298	288, 0
11,0	0,99	0,583	2088 + 3,3 · 34 = 2200						
				896	35,84	26	81,00	324	323,84
11,5	1,49	0,877	3023 + 2,7 · 27 = 3096						
				695	27,80	21	86,25	345	351,64
12,0	1,99	1,171	3749 + 2,1 · 20 = 3791						
				493	19,72	18	90,75	363	371,36
12,5	2,49	1,465	4265 + 1,5 · 13 = 4284						
				323	12,92	14	94,25	377	384,28
13,0	2,99	1,759	4599 + 0,9 · 8 = 4607						
				193	7,72	10	96,75	387	392,00
13,5	3,49	2,054	4798 + 0,4 · 5 = 4800						
				107	4,28	7	98,50	394	396,28
14,0	3,99	2,348	4893 + 4,8 · 3 = 4907						
				50	2,00	4	99,50	398	398,28
14,5	4,49	2,643	4953 + 4,3 · 1 = 4957						
				24	0,96	2	100,00	400	399,24
15,0	4,99	2,937	4981 + 3,7 · 0 = 4981						
				19	0,76				400,00
			5000						

Na isti se način konstruira iz teoretskih brojaka kolone 10, tab. XIII. (sl. 4) i sumarna krivulja za duljinu klasa.

c) Uspoređivanje binominalne sumarne krivulje s eksperimentalnom sumarnom krivuljom pomoću Hazenova dijagrama

Dokazano je, da vrijednosti integrala frekvencije za sumarnu binominalnu krivulju, izražene u postocima i prikazane grafički, daju pravac. Na osnovu toga izrađen je Hazenov dijagram, koji vidimo na sl. 8.

Da ustanovimo, do koje se mjere eksperimentalni podaci poklapaju s teoretskim, komparirat ćemo u Hazenovu papiru liniju konstruiranu od eksperimentalnih podataka s pravcem dobivenim od teoretskih podataka.

Teoretski pravac konstruira se iz podataka za srednju vrijednost (M) i standardnu devijaciju (σ).

Srednja se vrijednost (M) nalazi kod binominalne krivulje na Hazenovu dijagramu na paraleli od 50%. U tab. XIV. vidimo, da se u granicama M + 3 σ nalazi 99.7% svih varijanata, u granicama M — 3 σ samo preostalih 0.3%.

Na apscisi ćemo potražiti vrijednost M + 3σ, a na ordinati paralelu od 99.7%. Isto ćemo učiniti i za M — 3σ za apscisu, a na ordinati ćemo potražiti paralelu od 0.3%.

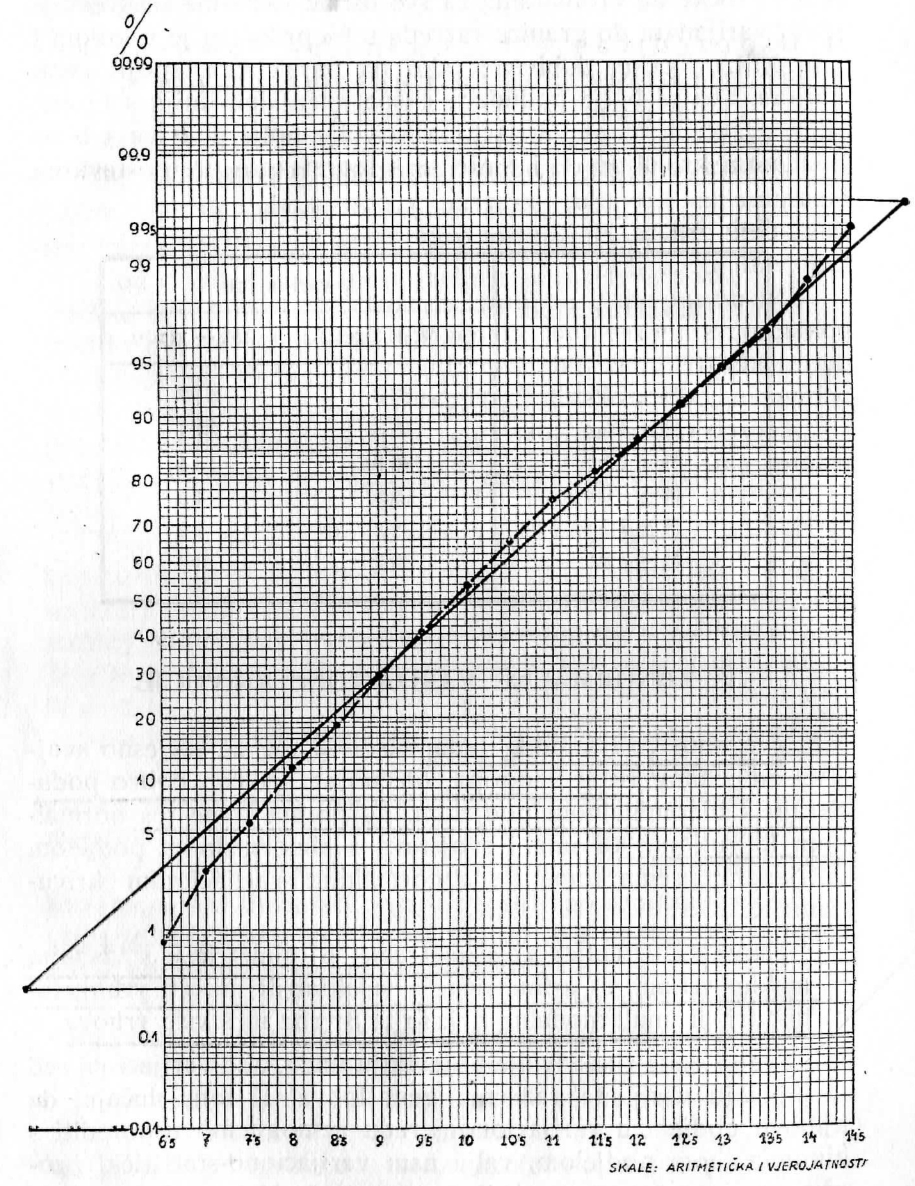
Točke M, m + 3σ i M — 3σ, koje smo tako dobili na paralelama, leže u pravcu.

U našem primjeru za duljinu klasa je M = 10.01 cm (str. 24). Dakle na apscisi treba kod 10,01 cm povući ordinatu do paralele 50%.

Na isti način valja tražiti i odgovarajuće točke za M + 3σ i M — 3σ. U našem je primjeru σ = 1,699 cm (str. 32). Dakle M + 3σ = 10,01 + 3 × 1,699 = 15,107 cm (ordinatu treba povući do paralele 99.7%).

M — 3σ = 10,01 + 3 × 1,699 = 4,913 cm (ordinatu treba povući do paralele 0.3%).

Iz eksperimentalnih brojaka naći ćemo točke na paralelama ovako: Na pr. u varijacionom redu za duljinu pšeničnog klasa u razredu 9.5—10 cm ima 56 biljaka. Sumarna je frekvencija varijanata do granice toga razreda 216, a to je 54% od ukupnog broja svih 400 varijanata. Prema tome želimo li naći



Sl. 8.

traženu točku, na Hazenovu diagramu na sl. 8. kod apscise 10 cm povući ćemo ordinatu do paralele 54%. Na isti način dobit ćemo i točke na ordinatama za sve ostale razredne frekvencije. (Broj varijanata do granice razreda u % prikazan je u koloni 8 tab. XIII.). Točke, dobivene tako na paralelama, spojit ćemo linijom. Što se bolje podudara eksperimentalna linija s teoretskim pravcem, to se varijaciona krivulja bolje pokriva s binominalnom krivuljom t. j. slaže se s teoretskom pretpostavkom.

Tab. XIV.

Latituda	% varijanata	
	$M + x\sigma$	$M - x\sigma$
$M \pm 0{\cdot}5\sigma$	38·3	61·7
$M \pm 1{\cdot}0\sigma$	68·3	31·7
$M \pm 1{\cdot}5\sigma$	86·6	13·4
$M \pm 2{\cdot}0\sigma$	95·5	4·5
$M \pm 2{\cdot}5\sigma$	98·8	1·2
$M \pm 3{\cdot}0\sigma$	99·7	0·3

V. ABNORMALNE VARIJACIONE KRIVULJE

Varijante varijacionog reda, sastavljenog za izvjesno svojstvo od jednog istog genotipa, obično se prilično dobro podudaraju s binominalnom podjelom, pa prema tome i s normalnom krivuljom. Ali ima i svojstava s abnormalnom podjelom varijanata, prema tome i s abnormalnim varijacionim krivuljama.

Takve su krivulje: a) asimetrične, b) simetrične s visokim ili niskim vrhom, c) asimetrične s visokim ili niskim vrhom ili d) bi-, tri- ili multimodalne t. j. sa 2, 3 vrha ili s više vrhova.

Sve se vrste tih krivulja pojavljuju onda, ako varijacioni red sačinjavaju varijante različnih genotipova. U tom slučaju, da njihovu podjelu u varijacionom redu uzmognemo usporediti s binominalnom podjelom, valja nam varijaciono-statistički proučiti varijante svakog pojedinog genotipa. Abnormalna podjela varijanata može biti katkada i u genotipu.

Ovdje nas u prvom redu zanima abnormalna podjela varijanata u varijacionom redu, sastavljenom od varijanata jednog istog genotipa.

1. Asimetrične krivulje genotipa

Asimetrija može biti dvovrsna i to: α) prividna ili β) prava.

ad α) prividna asimetrija pojavljuje se kod razrednih varijanata, kad se srednja vrijednost ne nalazi u sredini varijacionog razreda t. j. kad leži na granici dvaju razreda.

Kod cijelih varijanata pojavljuje se prividna asimetrija, ako srednja vrijednost nije cijeli broj ili ako srednja vrijednost leži između dva susjedna cijela broja.

ad β) ima slučajeva i s pravom asimetrijom u podjeli varijanata jednog istog genotipa, iako su se varijante razvijale pod gotovo istim vanjskim uslovima. U takvim se slučajevima i srednja vrijednost ne nalazi u razredu s najvećim brojem varijanata.

Ovu je asimetriju Quételet protumačio time, što faktori, koji uzrokuju atipičnu podjelu varijanata, djeluju jače u jednom smjeru nego u drugom. On je pošao od pretpostavke, da normalnoj podjeli varijanata odgovara formula $(a + b)^n$ i to da je $a = b$, dok atipična podjela nastaje tek onda, kad je $a > b$ ili $a < b$.

No Kapteyn je utvrdio, da ova pretpostavka vrijedi samo za male potencije od $(a + b)$. Ako su potencije velike i ako razlika između **a** i **b** nije prevelika, ne može to utjecati na asimetriju.

Kapteyn tumači asimetriju u podjeli varijanata jednog istog genotipa time, što organizmi aktivno reagiraju na vanjske utjecaje. To znači: ako je na pr. od dva organizma jednakog genotipa jedan iz nekog vanjskog razloga zaostao u rastu, a drugi se razvijao normalno, onda se i pod istim vanjskim uslovima zaostali organizam ne će jednako razviti kao normalni, nego tek proporcionalno prema svome rastu.

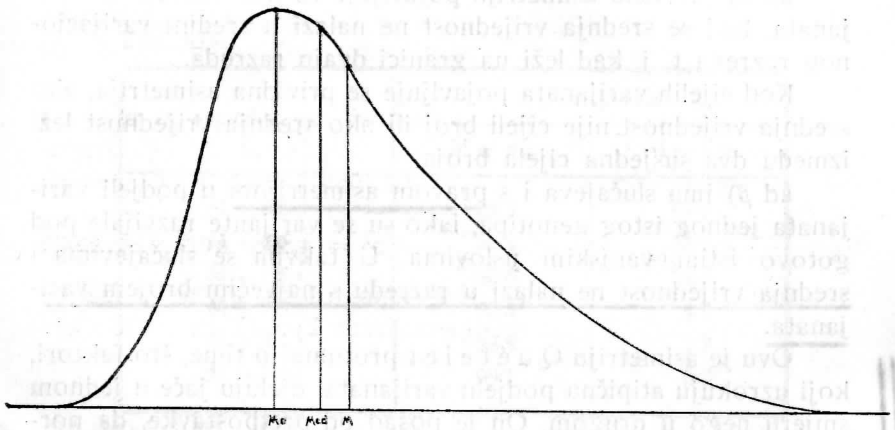
Asimetrija može biti pozitivna ili negativna.

Po Johannsenu je asimetrija pozitivna, ako se varijante u varijacionom redu protežu široko na desno od srednje vrijednosti. Protežu li se u svojoj širini lijevo od srednje vrijednosti, asimetrija je negativna.

Jačinu asimetrije izračunavamo po različnim varijaciono-statističkim formulama.

Za približnu orijentaciju jačine asimetrije služe nam m e d i j a n a (Med) (str. 20) i srednja vrijednost M (str. 21).

Kod idealne podjele varijanata je Med = M, a kod asimetrije je Med > M ili Med < M. Prema tome može kao mjerilo asimetrije poslužiti donekle razlika: M — Med (sl. 9.).



Sl 9.

Točnije izračunamo jačinu asimetrije (S) pomoću J o h a n n s e n o v e formule:

$$\text{asimetrija: } S = \frac{\Sigma p\alpha^3}{n} : \sigma^3$$

Ovdje je α razmak između pojedinih varijanata i srednje vrijednosti (M). Budući da je račun jednostavniji, ako se služimo aproksimativnom srednjom vrijednosti dakle polaznom točkom A (vidi str. 22) to treba, da u potonjem slučaju gornju formulu promijenimo ovako:

$$\text{asimetrija: } S = \left(\frac{\Sigma pa^3}{n} - 3b\frac{\Sigma pa^2}{n} + 2b^3\right) : \rho^3$$

Primjenu ove formule prikazat ćemo na našem primjeru s duljinom klasa kod pšenice. Varijacioni red za ovo svojstvo nalazi se na str. 18. Za aproksimativnu srednju vrijednost, koja nam služi kao polazna točka, uzeli smo već prije apsolutnu vrijednost razreda s duljinom klasa od 10—10.5 cm t. j. sredinu

tog razreda tako, da je A = 10.25 cm. Iz toga smo izračunali, da je srednja vrijednost M = 10.01 cm. Budući da se ona ne nalazi u sredini razreda 10 i 10.25 cm, to treba da spriječimo prividnu asimetriju na taj način, da srednju vrijednost smjestimo približno u sredinu razreda. Stoga treba promijeniti granice razreda na pr. ovako : 6.25—6.75—7.25—7.75—8.25—8.75—— 9.25 i t. d. i nanovo raspodijeliti varijante. Kako nam je želja, da se uputimo u metodiku rada i da što preglednije i shvatljivije prikažemo sve operacije, to ćemo u našem slučaju izračunati asimetriju bez obzira na spomenuti nedostatak našeg pređašnjeg varijacionog reda.

Neke su nam vrijednosti u formuli za asimetriju poznate već otprije. Pomoću skrižaljke na str. 23 i 24 tab. IV. i V. izračunali smo već b = 0.4775 prilikom računanja srednje vrijednosti,

$$b = \frac{\Sigma pa}{n} = \frac{4{,}711}{400} \text{ i } \rho = \sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2} = 3{,}398$$ kod računanja standardne devijacije. Sada treba samo još da iz iste skrižaljke tab. V. i kolone 7, 8 i 2 izračunamo izraz Σpa^3. U tu svrhu služe nam rubrike **p** i **a**^{3}. Prema tome su:

negativne vrijednosti:

$p \cdot a^3$	$p\,a^3$
19 · — 1	— 19
22 · — 8	— 176
18 · — 27	— 486
9 · — 64	— 576
9 · — 125	— 1125
2 · — 216	— 432
1 · — 343	— 343
Ukupno	— 3157

pozitivne vrijednosti:

$p \cdot a^3$	$p\,a^3$
1 · 512	512
2 . 729	1458
Ukupno	1970

dakle: Σpa^3 = —3157 + 1970 = —1187.

Prema tome je asimetrija varijacione krivulje za duljinu klasa:

$$S = \left[-\frac{1187}{400} - 3 \cdot (-0{,}4775) \cdot \frac{4711}{400} + 2 \cdot (-0{,}4775)^3\right] : 3{,}398^3 = \mathbf{0{,}35}$$

*

Asimetrija varijacione krivulje za broj klasića na klasu je: (Tab. VIII., kolona 5, 6 i 1 na str. 27).

$$S = \left[\frac{1697}{400} - 3 \cdot (-0{,}4475) \cdot \frac{3523}{400} + 2\,(-0{,}08961467)\right] : 25{,}2569 = 0{,}29$$

Za jačinu asimetrije predlažem ovu klasifikaciju:

Tab. XV.

Asimetrija — S	Jačina asimetrije
0,0 — 0,10	nema asimetrije
0,1 — 0,25	mala asimetrija
0,25 — 0,5	srednja asimetrija
0,5 — više	jaka asimetrija

Kod nas je dakle u oba primjera pozitivna asimetrija.

Treba konačno još napomenuti, da brojčana razlika između M — Med, kao aproksimativno mjerilo asimetrije nema uvijek isti predznak kao S.

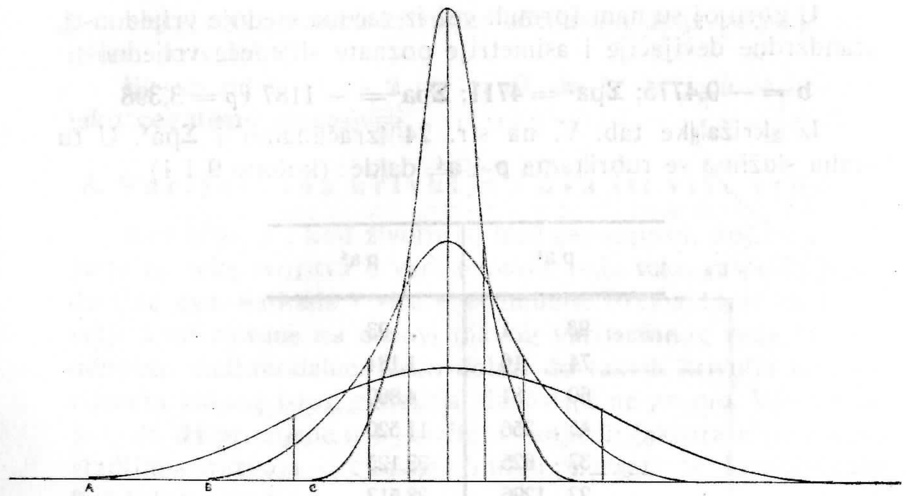
2. Ekscesivne krivulje (krivulje s visokim i krivulje s niskim vrhom)

Kod genotipova sa simetričnom pa i kod onih s asimetričnom krivuljom vrh krivulje je katkad viši, a katkad niži od vrha idealne ili normalne krivulje.

Takve se varijacione krivulje pojavljuju kod izvjesnih svojstava biljaka i životinja, te ih zovemo ekscesivnim krivuljama.

Eksces može biti pozitivan ili negativan. U prvom je slučaju vrh varijacione krivulje iznad, a u drugom ispod normalne krivulje (sl. 10, krivulja A : eksces —, C : eksces +, B : normalna krivulja).

Koji sve činioci utječu na ekscesivnost pojedinih svojstava organizma do danas nije još pronađeno. Svakako vrijedi i ovdje ono, što smo naveli već kod asimetrije t. j. da dva organizma istog genotipa, od kojih se jedan jače razvio od drugog, ne će kod daljeg rasta razvijati svoja svojstva jednako. Organizmi,



Sl. 10.

koji se razvijaju pod optimalnim prilikama rastu drugačije nego oni organizmi, za koje su uvjeti rasta nepovoljni.

Za približnu orijentaciju, da li je neka varijaciona krivulja ekscesivna ili nije, služi nam omjer između kvartila (Q) i standardne devijacije (σ). Kod idealne binominalne podjele varijanata u varijacionom redu je: $Q : \sigma = 0.6745$. Kad je $Q : \sigma > 0.6745$, onda je eksces pozitivan, a kad je $Q : \sigma < 0.6745$, eksces je negativan.

Točnije možemo ocijeniti jačinu i smjer ekscesa (E) pomoću Johannsenove formule:

$$E = \left(\frac{\Sigma p\alpha^4}{n} : \rho^4\right) - 3$$

I ovdje lakše i brže izvodimo računske operacije, ako gornju formulu prilagodimo za rad s aproksimativnom srednjom vrijednosti (polazna točka A). Gornja formula prelazi onda u ovu formulu:

$$E = \left[\left(\frac{\Sigma pa^4}{n} - 4\,b \cdot \frac{\Sigma pa^3}{n} + 6\,\frac{b^2\,\Sigma pa^2}{n} - 3\,b^4\right) : \rho^4\right] - 3$$

Na naš primjer s duljinom klasa pšenice primijenit ćemo sada gornju formulu da vidimo, da li se vrh varijacione krivulje poklapa s vrhom normalne krivulje.

U gornjoj su nam formuli već iz računa srednje vrijednosti, standardne devijacije i asimetrije poznate slijedeće vrijednosti:

$$b = -0{,}4775;\ \Sigma pa^2 = 4711;\ \Sigma pa^3 = -1187 \text{ i } \rho = 3{,}398$$

Iz skrižaljke tab. V. na str. 24 izračunamo i Σpa^4. U tu svrhu služimo se rubrikama **p** i **a**^{4}, dakle: (kolone 9 i 1)

$p\,a^4$	$p\,a^4$
93 · 1	93
74 · 16	1.184
60 · 81	4.860
45 . 256	11.520
37 · 625	23.125
22 · 1296	28.512
15 · 2401	36.015
7 · 4096	28.672
2 · 6561	13.122
$\Sigma\ p\,a^4$	147.103

$$E = \left\{\left[\frac{147.103}{400} - 4 \times (-0{,}4775) \times \left(-\frac{1187}{400}\right) + 6 \times (-0{,}4775)^2 \times \frac{4711}{400} - 3 \times (-0{,}4775)^4\right] : 3{,}398^4\right\} - 3 = -\mathbf{0{,}16361}$$

za duljinu klasa.

Eksces varijacione krivulje za broj klasića je pak: **E** = — 0,36043.

Slabo pozitivno ekscesivne su one krivulje, kod kojih je eksces (E) manji od 0.4. Pozitivan eksces je karakterističan po tome, što ima u sredini varijacionog reda ili krivulje više varijanata nego kod idealne binominalne podjele.

Kod negativnog ekscesa ima, protivno pozitivnom, u sredini varijacionog reda premalo varijanata u usporedbi s normalnom krivuljom.

Varijacioni redovi s manje od 6 razreda nisu podesni za izračunavanje ekscesa. Kad varijacioni red sačinjava samo 6 razreda, negativni eksces ne može biti manji od **E** = —2, jer u tom slučaju varijacionu krivulju sačinjavaju dvije potpuno odijeljene krivulje.

Eksces od **E** = — 2 već znači, da je varijaciona krivulja jako negativno ekscesivna.

3. Varijaciona krivulja s dva ili više vrhova

Kod bilja, a i kod životinja, ima genotipova, kojih su varijante za neka svojstva u varijacionom redu tako raspodijeljene, da čine dva, katkada i više maksimuma. Prema tome su i krivulje konstruirane na osnovi takvog varijacionog reda bi-, tri- odnosno multimodalne. Kako dolazi do takvih krivulja kod varijanata jednog istog genotipa, danas još ne znamo. Vjerojatno je ipak, da promjene u intenzitetu vanjskih faktora u pojedinim stadijima razvoja organizma mogu izazvati te komplicirane fiziološke procese.

VI. »MODUS« — TEMELJNA TOČKA VRHA KRIVULJE

Za karakteristiku nekog varijacionog reda ili krivulje upotrebljava se katkada i modus.

Potrebno je kadšto, da kod ocjene nekog svojstva znamo, do koje se mjere temeljna točka vrha varijacione krivulje — modus podudara s istom točkom u normalnoj krivulji. Modus je dakle najbrojnija vrijednost nekog svojstva t. j. ordinata s najviše varijanata.

Kod normalne krivulje je modus: **Mo** = **M**. Točno izračunavanje modusa prilično je komplicirano.

Za monomodalne varijacione krivulje modus približno izračunamo pomoću Pearsonove formule:

Mo = 3 **Med** — 2 **M** (**M** = srednja vrijednost a **Med** je medijana)

Na sl. 9. prikazana je asimetrična krivulja i njezine varijaciono-statističke vrijednosti srednja vrijednost **(M)**, mediana **(Med)** i modus **(Mo)**.

VII. NEKE SPECIJALNE VARIJACIONO-STATISTIČKE METODE U POLJOPRIVREDI

Na temelju već dosada opisanih varijaciono-statističkih vrijednosti izvedene su i neke specijalne statističke metode, s kojima se moramo upoznati, da bismo pomoću njih pravilno

ocijenili apsolutnu vrijednost i varijabilnost nekog svojstva kod čovjeka, biljke, životinje ili nežive stvari.

1. Kako se može unaprijed izračunati broj varijanata potrebnih za pokus

Kad bar približno znamo stepen varijabiliteta nekog svojstva, možemo već unaprijed izračunati, koliko puta treba pokus ponoviti t. j. koliko pokusnih životinja, parcelica ili ponavljanja (repeticija) treba za sortni pokus s gnojivom, dobom sjetve, načinom sjetve i t. d. da iz dobivenih podataka izvedemo točne zaključke.

Srednja i vjerojatna pogreška srednje vrijednosti smanjuju se, ako je broj ponavljanja (varijanata) velik. Pokusima se ustanovilo, da je na velikoj parceli srednja i vjerojatna pogreška za prirod biljaka obično veća od 10% i da se ova pogreška u praksi ne može sniziti ispod 5%.

Kod poljskog pokusa naročito je važno, da prije glavnog pokusa ustanovimo, nije li tlo pokusnog polja heterogeno. Heterogenost tla najbolje se uoči tako, da se pokusno polje zasije najprije jednom sortom poljoprivrednog bilja, koje jako reagira na razlike u kakvoći tla.

Želimo li znati, koliko mora biti varijanata t. j. pokusnih parcela, životinja, imanja i t. d. da iz pokusa izvedemo ispravne zaključke, izračunat ćemo ili srednju ili vjerojatnu pogrešku jedne varijante.

Kod žitarica je najmanja pogreška za prirod zrna po ha otprilike 5%. Broj varijanata, u našem slučaju pokusnih parcela, koje trebamo, da pokus bude točan, izračunamo tako, da vjerojatnu pogrešku (5%) podijelimo s drugim korijenom nepoznanice n, t. j. s brojem ponavljanja (varijanata). U drugi dio jednadžbe dolazi procentualna razlika (a), koju želimo mjeriti, između dvije sorte, a ovu razliku podijelimo sa omjerom između diferencije i vjerojatne pogreške te diferencije. Za spomenuti omjer kod poljskog pokusa sa sortama uzimamo faktor 4.5.

Prema tome je formula: $\frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{a}{4,5}$

Primjer:

Želimo znati, koliko nam treba pokusnih parcelica (n) od svake sorte, da odredimo razliku od a = 10% u prirodu zrna

između sorte **A** i **B**. Dakle: $\frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{10\%}{4,5}$; daljnim računom dobijemo

$$10\sqrt{n} = 22,5$$

$n = (2,250)^2 = 5,0625$ t. j. u pokusu treba svaku sortu sijati na **5** parcelica. U tab. XVI. izračunat je broj pokusnih parcelica potrebnih za signifikantnost pokusa, ako želimo mjeriti razliku u prirodu od a = 1 do 15%.

Tab. XVI.

Želimo ustanoviti razliku od a %	Broj parcelica potrebnih za signifikantnost pokusa
1	507
2	127
3	57
4	32
5	21
6	15
7	11
8	8
9	7
10	5
11	5
12	4
13	3
14	3
15	3

Kod pokusa s krmljenjem goveda Wood i Stratton su izračunali, da je vjerojatna pogreška za prirast na težini jedne životinje (varijante) 14%, a 3.8 je faktor, koji odgovara vjerojatnosti od 1 : 40.

Primjer:

Neka se izračuna, koliko životinja treba za pokus krmljenjem, da se još odredi razlika od 15% u prirastu na težini iz-

među jedne i druge skupine pokusnih životinja. U tom se slučaju služimo ovom formluom:

$$\frac{14\%}{\sqrt{n}} = \frac{a}{3{,}8}, \text{ dakle } \frac{14}{\sqrt{n}} = \frac{15}{3{,}8}$$

$$15\sqrt{n} = 14 \times 3{,}8$$

$$n = \left(\frac{14 \times 3{,}8}{15}\right)^2 = 12{,}5316$$

t. j. za naš pokus trebali bismo **12** do **13** životinja.

Mitchell i Grindley navode, da je varijacioni koeficijent (v) za prirast na težini u prosjeku za: ovce 21.63, svinje 17.12 i goveda 16.73. Na temelju krmnih pokusa izvedenih na različnim institutima u Engleskoj i Americi, izradili su spomenuti stručnjaci tabelu za najmanji broj životinja koji je potreban, da se ustanovi razlika u prirastu životinja uz dva različita načina krmljenja. (Vidi tab. XVII).

Tab. XVII.

Razlika u prirastu uz 2 različita obroka a %	Pokus sa svinjama	Pokus sa ovcama
	Broj životinja potreban za pokus	
50	1	2
40	2	3
30	3	4
20	5	8
17.5	7	10
15	9	14
12·5	13	20
10	20	31
7.5	36	54
5	80	121
2.5	317	482

2. Računsko izjednačenje varijacije priroda izazvane heterogenošću tla

Usporedimo li prirode iste sorte posijane u sortnom pokusu na 5 parcelica na jednakoj površini vidjet ćemo, da su prirodi jako različiti. U jednom slučaju kod sortnog pokusa s ozimom zobi dobili smo ove prirode u zrnu: 21, 23, 20, 19, 22 q/ha.

Aritmetička sredina ili srednja vrijednost (**M**) dobivena od priroda sa svih 5 parcelica najbliža je pravom prirodu spomenute pokusne sorte:

$$\mathbf{M} = \frac{21 + 23 + 20 + 19 + 22}{5} = 21 \text{ q/ha}$$

Prirod s pojedinih parcelica varira oko aritmetičke sredine **M** = 21 q/ha.

Spomenutu varijaciju uvjetuju dvije skupine pogrešaka i to: a) slučajne pogreške i b) sistematske pogreške.

Slučajne pogreške su ove: netočno odmjerivanje parcelica, netočnost kod sjetve i žetve, štete od miševa i ptica, ispadanje zrna kod žetve i t. d.

Sistematske su pogreške u prvom redu pogreške uvjetovane heterogenošću tla.

Najtočniji pokus je na izjednačenom tlu. Ali takova se pokusna polja nađu vrlo rijetko. Bilo je stoga potrebno pronaći računske metode, koje će nam omogućiti, da na osnovu rezultata pokusa na heterogenim tlima donesemo pouzdane zaključke. U tu svrhu služe ove najvažnije metode.

a) Standardna metoda

Kod ove metode smjestimo sorte, koje želimo istražiti na pr. na rodnost, između kontrolne ili standardne sorte. Isto tako kod pokusa s gnojivima, različnim načinom sjetve, okapanja i t. d. smjestimo pokusne parcele tako, da dolaze između standardnih parcela. Standardna parcela može biti svaka treća- četvrta ili peta u redu.

Evo primjene ove metode u praksi:

Pravljen je sortni pokus s 4 oplemenjene sorte ozime zobi, posijane u jednom pojasu uz 4 repeticije. Ispred i iza svakog niza oplemenjenih sorti posijana je jedna domaća sorta zobi kao standardna ili kontrolna sorta. Oplemenjene sorte označit ćemo sa I, II, III, IV, a standardnu sortu sa **K**.

Raspored parcela i prirode u zrnu (q/ha) ovih sorata vidimo u tab. XVIII.

Tab. XVIII.

Oznaka sorte i komparacije	K_1	I_1	II_1	III_1	IV_1	K_2	I_2	II_2	III_2	IV_2	K_3
Parcelica broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a) Faktičan prirod q/ha	21·3	22·6	19·7	18·6	23·8	19·8	21·3	20·3	19·3	21·6	20·7
b) Vjerojatni prirod kontrolne sorte	21·3	21·0	20·7	20·4	20·1	19·8	19·98	20·16	20·34	20·52	20·7
c) Vjerojatni prirod pokusnih sorta, kad bi tlo bilo homogeno	—	22·104	19·547	18·727	24·321	—	21·896	20·682	19·489	21·621	—

Oznaka sorte i komparacije	I_3	II_3	III_3	IV_3	K_4	I_4	II_4	III_4	IV_4	K_5
Parcelica broj	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
a) Faktičan prirod q/ha	20·4	19·8	18·2	20·9	19·1	19·9	18·9	19·7	22·7	21·8
b) Vjerojatni prirod kontrolne sorte	20·38	20·06	19·74	19·42	19·1	19·44	19·78	20·12	20·46	21·8
c) Vjerojatni prirod pokusnih sorta, kad bi tlo bilo homogeno	20·560	20·273	18·937	22·105	—	21·026	19·626	20·111	22·788	—

P r i m j e r:

Vjerojatni se prirod sorte III na pokusnoj parcelici br. 9 uz pretpostavku, da je tlo »homogeno«, izračuna ovako:

Najprije treba ustanoviti, kakav bi bio prirod kontrolne sorte (K) na parcelici br. 9. Budući da ta parcelica leži između parcelica br. 6 i br. 11, na kojima je rasla kontrolna sorta sa prirodima $K_2 = 19{,}8$ i $K_3 = 20{,}7$, znači, da se prirodi povisuju od parcelice br. 6 u smjeru parcelice br. 11 za $\frac{K_3 - K_2}{5} = \frac{20{,}7 - 19{,}8}{5} = 0{,}18$ q/ha po svakoj parcelici.

Iza parcelice br. 6 s prirodom $K_2 = 19{,}8$, parcelica br. 9 je treća. Dakle bi prirod kontrolne sorte na parcelici br. 9 bio: $K_2 + 3 \cdot 0{,}18 = 20{,}34$ q/ha.

Vjerojatni prirod poredbene sorte na homogenom tlu izračunamo tako, da faktični prirod pomnožimo s aritmetskom sredinom priroda svih kontrolnih parcelica i podijelimo s vjerojatnim prirodom, koji bismo dobili, da je na odnosnoj parcelici rasla kontrolna sorta.

Dakle:

$$\frac{III_2 \times M}{K_2 + 3 \times 0{,}18} = \frac{19{,}3 \times 20{,}54}{19{,}8 + 3 \times 0{,}18} = 19{,}489 \text{ q/ha}$$

Aritmetička je sredina svih kontrolnih parcelica

$$M = \frac{K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5}{5} =$$

$$= \frac{21{,}3 + 19{,}8 + 20{,}7 + 19{,}1 + 21{,}8}{5} = 20{,}54 \text{ q/ha}$$

Uz pretpostavku, da je tlo homogeno, izračunat ćemo vjerojatne prirode poredbenih sorta i na drugim parcelicama.

P r o s j e č n e prirode neke sorte na nehomogenom i »homogenom« tlu izračunamo tako, da sumiramo prirode s pojedinih parcelica. U našem su primjeru pokusne sorte posijane na 4 različite parcelice, a kontrolna sorta (K) na 5 parcelica. Dakle treba u svake pokusne sorte zbroj priroda na parcelicama dividirati sa 4, a zbroj priroda s parcelica, posijanih kontrolnom sortom, sa 5.

U tab. XIX. su sakupljeni prosječni prirodi zrna pojedinih sorata i njihove srednje pogreške i to na nehomogenom i »homogenom« tlu.

Tab. XIX.

Oznaka sorte	Prosječan prirod zrna q/ha nehomogeno tlo	Prosječan prirod zrna q/ha „homogeno" tlo
Kontrolna K	20,54 ± 0,49	20,54
Sorta I	21,05 ± 0,63	21,40 ± 0,23
Sorta II	19,68 ± 0,29	20,03 ± 0,09
Sorta III	18,95 ± 0,34	19,32 ± 0,31
Sorta IV	22,25 ± 0,65	22,71 ± 0,59

b) Kako se kod sortnih pokusa s okopavinama računski korigira prirod modificiran uslijed praznih mjesta

Kod sortnih pokusa s okopavinama posijanih ili posađenih u stanovitim pravilnim razmacima, neke biljke katkada uginu, pa radi toga nastaju prazna mjesta. Zbog toga se biljke oko praznih mjesta bolje razviju, a to dakako utječe i na prirod. Ako želimo u takvom slučaju odrediti rodnost pokusne sorte, moramo korigirati vrijednost priroda, kojega dobijemo na takvoj parceli.

Ukupni prirod jedne pokusne parcele mogao bi se samo onda usporediti s prirodom druge poredbene parcele, kad ni na jednoj ne bi bilo praznih mjesta.

Za izračunavanje korigirane vrijednosti priroda pokazalo se, da je vrlo dobra Henrichova formula. Korigiranom smatramo onu vrijednost priroda, koju bismo dobili, kad na pokusnim parcelama ne bi bilo praznih mjesta. Korigirani prirod p_1 dade se po Henrichovoj formuli izračunati ovako:

$$p_1 = \frac{p + b_1 \frac{p}{b_2}}{2}$$

gdje je **p** faktični prirod, $\mathbf{b_1}$ broj biljaka, koji bi bio na parceli, da nije uginula nijedna biljka, $\mathbf{b_2}$ broj biljaka kod berbe.

Za izračunavanje korigiranog priroda okopavina primjenjujem vlastitu formulu: $p_1 = \frac{b_1\, p}{25}$ Najprije odredimo prirod **p** od prosječnih 25 biljaka, izvađenih s onih dijelova pokusne parcele, gdje nije bilo praznih mjesta. Prosječan prirod jedne biljke iznosi $\frac{p}{25}$ Korigirani prirod, koji bismo dobili, da na pokusnoj parceli nije bilo praznih mjesta, izračunamo dakle tako, da prosječan prirod jedne biljke $\frac{p}{25}$ pomnožimo s normalnim brojem biljaka.

3. Peterova i Besselova metoda za izračunavanje vjerojatne pogreške

Kod pokusa je u poljoprivredi vrlo često već iz tehničkih razloga ograničen broj pokusnih varijanata. Obično moramo raditi s malim brojem biljaka, pokusnih parcela, životinja i sl.,

tako da kod sortnih, gnojidbenih i drugih pokusa imamo 3, 4, 5 a najviše deset repeticija.

U takvim slučajevima izračunavamo vjerojatnu pogrešku (E. P.) jedne varijante i pogrešku srednje vrijednosti po Peterovoj ili po Besselovoj formuli.

Peterova formula za vjerojatnu pogrešku jedne varijante (na pr. za jednu pokusnu parcelu ili životinju) glasi:

$$\alpha)\qquad E.P._{sg} = 0{,}8453 \frac{\Sigma(\pm D)}{\sqrt{n\,(n-1)}}$$

a za vjerojatnu pogrešku srednje vrijednosti (M):

$$\beta)\qquad E.P._{M} = 0{,}8453 \frac{\Sigma(\pm D)}{n\sqrt{n-1}}$$

gdje je **n** broj varijanata, **d** zbroj diferencija pojedinih varijanata srednje vrijednosti bez obzira na predznak, a 0,8453 je konstanta.

Besselova formula za vjerojatnu pogrešku jedne varijante glasi:

$$\gamma)\qquad E.P._{sg} = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{n-1}}$$

a za vjerojatnu pogrešku srednje vrijednosti:

$$\delta)\qquad E.P._{M} = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{n\,(n-1)}}$$

Kako se po Peterovim i Besselovim formulama izračunavaju vjerojatne pogreške, pokazat će nam slijedeći primjer:

Od jedne linije pšenice Prolifik, koja je s drugim različnim sortama pšenice uvrštena u sortni pokus na 10 parcelica, dobiveni su ovi prinosi zrna preračunati na hektar:

Tab. XX.

Tekući broj parcelica	Prirod zrna q/ha A	Diferencije (D) od srednje vrijednosti (M) A — M = D	D^2	$M_D - D = D'$
1	23,2	+ 0,2	0,04	0,56
2	22,7	— 0,3	0,09	0,46
3	24,2	+ 1,2	1,44	0,44
4	21,5	— 1,5	2,25	0,74
5	22,8	— 0,2	0,04	0,56
6	23,5	+ 0,5	0,25	0,26
7	21,3	— 1,7	2,89	0,94
8	22,9	— 0,1	0,01	0,66
9	23,6	+ 0,6	0,36	0,16
10	24,3	+ 1,3	1,69	0,54
	M = 23,00	Σ (D) = 7,6	Σ D^2 = 9,06	Σ (± D') = = 5,12

$$\frac{\Sigma(\pm D)}{10} = 0{,}76 = M_D$$

Srednja vrijednost za prirod $M = \frac{230}{10} = 23$ q/ha

V j e r o j a t n a p o g r e š k a za jednu varijantu, dakle za jednu parcelu iznosi po P e t e r o v o j f o r m u l i:

$$E.P._{sg} = \pm 0{,}8453 \cdot \frac{7{,}6}{\sqrt{10\,(10-1)}} = \pm 0{,}6771,$$

a po B e s s e l o v o j:

$$E.P._{sg} = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{9{,}06}{10-1}} = \pm 0{,}676$$

Prema tome svaka od 10 parcela (varijanata V) ima istu vjerojatnu pogrešku. Na pr. za parcelu br. 6 zabilježili bismo prirod ovako:

$M_6 \pm E.P._{sg} = 23{,}5 \pm 0{,}6771$ (Peterova formula za jednu varijantu) odnosno

$M_6 \pm E.P._{sg} = 23{,}5 \pm 0{,}676$ (Besselova formula za jednu varijantu.)

Za srednju vrijednost *M* je vjerojatna pogreška po Peterovoj formuli:

$$E.P._M = \pm 0{,}8453 \frac{7{,}6}{10\sqrt{10-1}} = \pm 0{,}214,$$

a po Besselovoj:

$$E.P._M = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{9{,}06}{10\,(10-1)}} = \pm 0{,}214$$

Prosječan je dakle prinos zrna naše Prolifik-pšenice $M \pm E.P._M = 23 \pm 0{,}214$ (Po Peterovoj i po Besselovoj formuli).

U našem se slučaju vjerojatne pogreške dobivene po Peterovim formulama dobro slažu s pogreškama, koje smo izračunali po Besselovim formulama. Vjerojatne su pogreške izračunate po B e s s e l u točnije nego po P e t e r u. Računanje je po B e s s e l o v o j formuli kompliciranije i dulje nego po Peterovoj formuli.

Možemo uštediti nešto vremena, ako se kod računa po Besselu služimo Z ö l l e r o v i m tabelama.

4. Modificirana Peterova metoda za srednju pogrešku — m_M

Spomenuta izračunavanja iziskuju u svakom slučaju dosta vremena. Da olakšam i ubrzam te operacije barem kod pokusa s 2 do 10 ponavljanja — a taj je broj čest kod poljskih pokusa — izradio sam na osnovu Peterove formule za vjerojatnu pogrešku srednje vrijednosti tabelu za srednju pogrešku te vrijednosti.

Za s r e d n j u p o g r e š k u s r e d n j e v r i j e d n o s t i upotrebljavam formulu $m_M = \frac{\Sigma(\pm D)}{n\sqrt{n-1}}$

U tab. XXI. od ove je formule izračunan izraz $\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$ za 2 do 10 varijanata (n). Prema tome treba izračunati Σ (±D) t. j. vrijednost, koju dobijemo, ako b e z o b z i r a n a p r e d z n a k z b r o j i m o r a z l i k e između srednje vrijednosti (*M*)

i vrijednosti pojedinih varijanata. Upotrebu te tabele prikazat ćemo najbolje na ovom primjeru:

Prirode zrna po hektaru pšenice Prolifik, posijane u sortnom pokusu na 10 parcelica — dakle 10 varijanata — vidimo na str. 64.

Ako prirode pojedinih parcelica zbrojimo i zbroj podijelimo sa n = 10, dobit ćemo srednju vrijednost $M = \frac{230}{10} =$ = 23 q/ha zrna.

Odbijemo li od ove srednje vrijednosti prirod svake parcelice (varijante) posebno, i ove razlike označimo sa D_1, D_2 do D_{10}, pa ih onda zbrojimo bez obzira na predznak (+ ili —), dobit ćemo zbroj $\Sigma (\pm D)$. U našem je primjeru $\Sigma (\pm D) = 7{,}6$. U tab. XXI. naći ćemo za n = 10 vrijednost 0,03333; dakle je za M=23 srednja pogreška: $m_M = 7{,}6 \cdot 0{,}3333 = 0{,}25333$.

Ako je n = 5 t. j. ako imamo u sortnom pokusu od iste sorte 5 parcelica (repeticija), onda je srednja pogreška srednje vrijednosti t. j. prosječnog priroda: $m_M = 0{,}1\ \Sigma (\pm D)$.

U tom slučaju ne trebamo tabelu, nego $\Sigma (\pm D)$ pomnožimo s 0,1, i to je već tražena srednja pogreška.

Tab. XXI.

n	$\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$
2	0,50000
3	0,23570
4	0,14433
5	0,10000
6	0,07453
7	0,05832
8	0,04724
9	0,03928
10	0,03333

5. Studentova metoda, kojom se određuje opravdanost razlike između dviju srednjih vrijednosti

Ako je broj varijanata u nekom pokusu malen, određujemo vjerojatne srednje pogreške $E.P._M$ za srednju vrijednost (M) najčešće po Peterovoj ili Besselovoj formuli. Da li je diferencija (D) između srednjih vrijednosti (M_1 i M_2) varijaciono-statistički opravdana, vidi se iz omjera $\frac{D}{E\,P._D}$.

Ondje, gdje treba usporediti varijantu po varijantu jedne serije pokusa s odgovarajućim varijantama druge serije, da bismo pronašli razliku između ovih serija, služimo se često Studentovom metodom. Pomoću ove metode računski ustanovimo, da li razlika između dvije srednje vrijednosti leži u granicama vjerojatnosti ili probabiliteta.

Ovu ćemo metodu upotrebiti na pr. kod sortnih pokusa, koje provodimo kroz više godina; kod pokusa o djelovanju dvaju različnih krmiva na iste životinje; kod pokusa o djelovanju paše ili stajskog krmljenja na sastav mlijeka istih životinja i sl.

Studentova je metoda prvi put objelodanjena god. 1908. u časopisu »Biometrika«, a na njenu važnost i upotrebljivost u eksperimentalnoj poljoprivredi upozorio je god. 1923. američki učenjak prof. dr. Love. U Americi se ova metoda mnogo upotrebljava na poljoprivrednim pokusnim stanicama, dok je u Evropi još i dan danas slabo poznata.

Da je što bolje upoznamo, prikazat ćemo njenu primjenu kod sortnog pokusa sa sojom. Kroz pet godina vršili smo sortne pokuse, kako bismo pronašli, koja od 4 sorte soje oplemenjene u našem Zavodu za oplemenjivanje bilja sadržava najviše masti. U pokusu je svake godine svaka od sorata **A**, **B**, **C** i **D** posijana u 6 repeticija na parcelicama od 5 m duljine i u 5 redova širine. Nacrt sijanja tih sorata, te kontrolne sorte **K** bio je ovaj: (sl. 11)

K_1	A_1	B_1	C_1	D_1	K_2	A_2	B_2	C_2	D_2	K_3	A_3	B_3	C_3	D_3	K_4
C_4	D_4	K_5	A_4	B_4	C_5	D_5	K_6	A_5	B_5	C_6	D_6	K_7	A_6	D_6	K_8

Sl. 11.

*

Od svake sorte uzet je sa svake od 6 parcelica prosječan uzorak sjemena, i nakon toga se određivao sadržaj masti u svakom uzorku 3 puta. Interesiralo nas je, koja od sorata A i B, sadržava nasljedno uvjetovan veći postotak masti.

Sadržaj masti u tim sortama u pojedinim godinama pokusa prikazan je u donjoj tabeli:

Godina pokusa	Sadržaj masti u sjemenu %		A—B=D	D — M_D	(D — M_D)^2
	Sorta A	Sorta B			
1934	19,25	18,36	0,89	0,41	0,1681
1935	18,77	17,84	0,93	0,45	0,2025
1936	17,58	17,67	−0,09	−0,57	0,3249
1937	20,36	19,65	0,71	0,23	0,0529
1938	18,09	17,34	0,75	0,27	0,0729
1939	18,45	18,76	−0,31	−0,79	0,6241
	$\frac{\Sigma A}{n}=\frac{112,5}{6}=$ = 18,75%	$\frac{\Sigma B}{n}=\frac{109,62}{6}=$ = 18,27%	ΣD = 2·88		Σ(D — M_D)^2 = 1,4454

a odgovarajuće su vrijednosti izračunate po ovim formulama:

$$M_D = \frac{\Sigma(D)}{n} = \frac{2,88}{6} = 0,48,$$

$$x = \sqrt{\frac{\Sigma(D - M_D)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1,4454}{6}} = \mathbf{0,49081}$$

$$Z = \frac{M_D}{x} = M_D : \sqrt{\frac{\Sigma(D - M_D)^2}{n}} = \frac{0,48}{0,49081} = \mathbf{0,9779}$$

Najprije se izračuna srednja vrijednost (M_D) diferencije A — B = D; iza toga treba za svaku godinu pronaći razliku između D i M_D, a onda (D — M_D)^2. Sumu (D — M_D)^2 podijelimo s brojem svih varijanata, u našem slučaju s brojem godina (n), te iz konačnog broja izvadimo drugi korijen, a to daje **X**. Pomoću **M_D** i **X** izračunamo $Z = \frac{M_D}{x}$, a iz njega u tabeli XXII. pronalazimo v j e r o j a t n o s t **P.** Vjerojatnost, koja odgovara vrijednosti **Z,** naći ćemo u tab. XXII., u rubrici **Z** i **n** (broj varijanata).

Tab. XXII a

Z	n = 2
.1	1.14
.15	1.21
.2	1.29
.25	1.37
.3	1.46
.35	1.54
.4	1.64
.45	1.74
.5	1.83
.55	1.94
.6	2.05
.65	2.16
.7	2.27
.75	2.39
.8	2.51
.85	2.62
.9	2.75
.95	2.87
1.0	3.00
1.05	3.12
1.1	3.26
1.15	3.39
1.2	3.52
1.25	3.65
1.3	3.79
1.35	3.92
1.4	4.07
1.45	4.20
1.5	4.34
1.55	4.48
1.6	4.62
1.65	4.76
1.7	4.91
1.75	5.05
1.8	5.20
1.85	5.34
1.9	5.49
1.95	5.63
2.0	5.78
2.05	5.92
2.1	6.07
2.15	6.21
2.2	6.36
2.25	6.51
2.3	6.66
2.35	6.81
2.4	6.96
2.45	7.10
2.5	7.26
2.55	7.40
2.6	7.55
2.65	7.70
2.7	7.86

Tab. XXII a

Z.	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$	$n=16$	$n=17$
.1	1.14	1.22	1.29	1.35	1.40	1.46	1.50	1.55	1.59	1.64	1.68	1.72	1.76	1.80	1.84	1.88
.15	1.21	1.35	1.46	1.56	1.66	1.75	1.83	1.92	2.00	2.08	2.16	2.24	2.31	2.39	2.47	2.54
.2	1.29	1.49	1.66	1.82	1.97	2.12	2.26	2.41	2.55	2.70	2.84	2.99	3.14	3.29	3.44	3.60
.25	1.37	1.64	1.88	2.10	2.32	2.54	2.75	2.97	3.19	3.41	3.64	3.87	4.11	4.36	4.60	4.86
.3	1.46	1.81	2.13	2.44	2.76	3.08	3.41	3.75	4.11	4.48	4.86	5.27	5.69	6.13	6.59	7.08
.35	1.54	1.98	2.40	2.81	3.24	3.68	4.14	4.62	5.13	5.67	6.24	6.84	7.47	8.15	8.86	9.62
.4	1.64	2.18	2.72	3.27	3.85	4.48	5.15	5.88	6.67	7.53	8.45	9.47	10.6	11.8	13.1	14.5
.45	1.74	2.39	3.05	3.75	4.51	5.33	6.24	7.24	8.34	9.54	10.9	12.3	13.9	15.7	17.7	19.8
.5	1.83	2.62	3.44	4.35	5.36	6.50	7.80	9.26	10.9	12.8	14.9	17.3	20.1	23.3	26.8	30.8
.55	1.94	2.85	3.85	4.97	6.25	7.72	9.42	11.4	13.6	16.2	19.2	22.7	26.7	31.3	36.5	42.7
.6	2.05	3.12	4.33	5.75	7.42	9.42	11.8	14.6	18.0	22.0	26.8	32.4	39.3	47.3	56.8	68.4
.65	2.16	3.39	4.82	6.54	8.62	11.2	14.2	17.9	22.5	27.9	34.6	42.5	52.2	63.9	77.7	95.2
.7	2.27	3.69	5.41	7.55	10.2	13.6	17.8	23.1	29.8	38.1	48.5	61.5	77.7	99.0	124.	155.
.75	2.39	3.99	5.99	8.55	11.8	16.0	21.4	28.3	37.2	48.3	62.7	81.0	104.	134.	171.	216.
.8	2.51	4.33	6.70	9.82	14.0	19.5	26.8	36.5	49.3	66.1	88.3	118.	158.	207.	277.	356.
.85	2.62	4.66	7.39	11.1	16.1	22.9	32.1	44.5	61.1	83.7	114.	155.	207.	277.	369.	499.
.9	2.75	5.04	8.22	12.7	18.9	27.7	40.0	57.1	81.0	114.	160.	226.	311.	434.	587.	832.
.95	2.87	5.41	9.03	14.2	21.7	32.4	47.8	69.4	100.	144.	207.	293.	416.	587.	832.	1110.
1.0	3.00	5.83	10.0	16.2	25.5	39.2	59.2	89.1	132.	195.	293.	434.	624.	908.	1428.	1999.
1.05	3.12	6.24	11.0	18.2	29.1	45.7	70.4	108.	163.	243.	369.	555.	832.	1249.	1999.	2499.
1.1	3.26	6.69	12.1	20.6	34.0	54.9	87.5	138.	216.	332.	525.	832.	1249.	1999.	3332.	4999.
1.15	3.39	7.13	13.2	22.9	38.7	63.5	103.	166.	262.	416.	666.	999.	1666.	2499.	3332.	4999.
1.2	3.52	7.63	14.5	25.9	44.9	75.9	127.	212.	344.	555.	908.	1428.	2499.	3332.	4999.	9999.
1.25	3.65	8.11	15.7	28.8	50.8	87.5	151.	255.	416.	713.	1110.	1666.	3332.	4999.	4999.	
1.3	3.79	8.64	17.2	32.3	58.5	104.	184.	322.	555.	999.	1666.	2499.	4999.	9999.	9999.	
1.35	3.92	9.16	18.6	35.8	66.1	119.	216.	384.	666.	1249.	1999.	3332.	4999.			
1.4	4.07	9.74	20.3	40.0	75.9	142.	262.	475.	908.	1666.	3332.	4999.	9999.			
1.45	4.20	10.3	21.9	44.0	85.2	163.	302.	555.	1110.	1999.	3332.	4999.				
1.5	4.34	10.9	23.9	49.0	98.0	191.	369.	713.	1428.	2499.	4999.	9999.				
1.55	4.48	11.5	25.7	53.9	109.	216.	434.	832.	1666.	2499.	4999.					
1.6	4.62	12.2	27.7	60.0	124.	255.	525.	999.	1999.	3332.	9999.					
1.65	4.76	12.8	29.8	65.7	138.	285.	587.	1110.	2499.	3332.						
1.7	4.91	13.5	32.2	72.5	158.	332.	713.	1428.	3332.	4999.						
1.75	5.05	14.2	34.5	79.0	174.	369.	832.	1666.	3332.	4999.						
1.8	5.20	14.9	37.0	86.7	199.	434.	999.	1999.	4999.	9999.						
1.85	5.34	15.6	39.5	94.2	216.	499.	1110.	2499.	4999.							
1.9	5.49	16.4	42.5	103.	243.	587.	1249.	3332.	9999.							
1.95	5.63	17.1	45.1	111.	269.	624.	1428.	3332.								
2.0	5.78	17.9	48.3	122.	302.	713.	1666.	4999.								
2.05	5.92	18.7	51.4	132.	332.	768.	1999.	4999,								
2.1	6.07	19.6	54.9	144.	369.	908.	2499.	4999.								
2.15	6.21	20.4	58.2	155.	399.	999.	2499.	4999.								
2.2	6.36	21.3	61.9	168.	454.	1249.	3332.	9999.								
2.25	6.51	22.1	65.2	181.	499.	1249.	3332.									
2.3	6.66	23.1	69.4	199.	555.	1428.	4999.									
2.35	6.81	24.0	73.1	212.	587.	1666.	4999.									
2.4	6.96	25.0	77.7	232.	666.	1999.	4999.									
2.45	7.10	25.9	81.6	249.	713.	1999.	4999.									
2.5	7.26	26.9	86.7	269.	768.	2499.	4999.									
2.55	7.40	27.9	91.6	285.	832.	2499.	4999.									
2.6	7.55	29.0	97.0	302.	908.	2499.	9999.									
2.65	7.70	30.1	102.	322.	999.	2499.										
2.7	7.86	31.2	108.	356.	1110.	3332.										

Tab. XXII b

Z.	n = 18	n = 19	n = 20	n = 21	n = 22	n = 23	n = 24	n = 25	n = 26	n = 27	n = 28	n = 29	n = 30
.1	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2 11	2.15	2.18	2.26	2.26	2.29	2.33	2.37
.15	2.62	2.69	2.77	2.84	2 92	2.99	3.07	3.14	3.22	3.30	3.37	3.45	3.52
.2	3.75	3.91	4.08	4.24	4.41	4.58	4.76	4.94	5.12	5.31	5.50	5.69	5.90
.25	5.12	5.39	5.66	5.94	6.23	6.52	6.83	7.14	7.46	7.79	8.12	8.47	8.82
.3	7.59	8.12	8 68	9.27	9.89	10.5	11.2	11.9	12.7	13.5	14.3	15.2	16.1
.35	10.4	11.3	12.2	13.1	14.1	15.2	16.3	17.5	18.7	20.1	21.5	23.0	24.5
.4	16.0	17.7	19.5	21.5	23.7	26.0	28.6	31.4	34.3	37.8	41.2	45.3	49.3
.45	22.2	24.8	27.7	30.7	34.2	38.1	42.1	46.6	51.6	57.1	63.1	69.9	76.5
.5	35.4	40.7	46.4	53.1	60.7	69.4	79.0	89.9	102.	117.	132.	151.	171.
.55	49.5	57.5	66 6	77.1	89.1	103.	118.	136.	155.	181.	207.	237.	269.
.6	81.6	98.0	117.	140.	166.	199.	237.	277.	332.	339.	475.	555.	666
.65	115.	140.	168.	203.	243.	302.	356.	434.	525.	624.	768.	908.	1110.
.7	195.	249.	302.	384.	475.	624.	768.	999.	1249.	1666.	1999.	2499.	3332.
.75	277.	356.	434.	555.	713.	908.	1110.	1428.	1999.	2499.	3332.	3332.	4999.
.8	475.	624.	832.	1110.	1428.	1999.	2499.	3332.	4999.	9999.	9999.	9999.	9999.
.85	666.	908.	1110.	1428.	1999.	2499.	3332.	4999.	4999.				
.9	1110.	1666.	1999.	2499.	3332.	4999.	9999.	9999.	9999.				
.95	1666.	2499.	3332.	3332.	4999.	4999.							
1.0	3332.	4999.	9999.	9999.	9999.	9999.							
1.05	4999.	4999.											
1.1	9999.	9999.											

Tab. XXII c.

Z.	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
2.75	8.00	32.2	113.	369.	1110.	3332.
2 8	8.16	33.4	118.	399.	1249.	4999.
2.85	8.30	34.5	124.	416.	1249.	4999.
2.9	8.46	35.6	131.	454.	1428.	4999.
2.95	8.61	36.7	136.	475.	1428.	4999.
3.0	8.77	37.9	144.	525.	1666.	4999.
3.05	8.91	39.2	151.	555.	1666.	4999.
3.1	9.07	40.5	158.	587.	1999.	9999.
3.15	9.21	41.6	163.	587.	1999.	
3.2	9.37	42.9	171.	624.	2499.	
3.25	9.52	44.0	178.	666.	2499.	
3.3	9.67	45.5	188.	713.	2499.	
3.35	9.82	46.8	195.	768.	2499.	
3.4	9.98	48.3	203.	832.	3332.	
3.45	10.1	49.5	212.	832.	3332.	
3.5	10.3	51.1	221.	908.	3332.	
4.0	11.8	66.1	322.	1666.	4999.	
4.5	13.3	83.0	434.	2499.	4999.	
5.0	14.9	102.	624.	3332.	9999.	
5.5	16.5	122.	832.	4999.		
6.0	18.0	146.	999.	9999.		
6 5	19.6	171.	1249.			
7.0	21.1	199.	1666.			
7.5	22.7	226.	1999.			
8.0	24.3	255.	2499.			
8.5	25.8	293.	2499.			
9.0	27.4	322.	3332.			
9.5	28.9	369.	3332.			
10.0	30.5	399.	4999.			
15.0	46.2	908.	9999.			
20.0	61.9	1666.				
25.0	77.7	2499.				
30.0	93.3	3332.				
35.0	109.	4999.				
40.0	124.	4999.				
45.0	140.	9999.				
50.0	153.					
60.0	188.					
70.0	221.					
80.0	249.					
90.0	285.					
100.0	311.					
120.0	369.					
140.0	434.					
150.0	475.					
160.0	499.					
180.0	555.					
200.0	624.					
250.0	768.					
300.0	908.					
350.0	1110.					
400.0	1249.					
450.0	1428.					
500.0	1666.					
600.0	1999.					
700.0	1999.					
1000.0	3332.					
1500.0	4999.					
2000.0	4999.					
3000.0	9999.					

U našem je primjeru Z = 0,9779, a **n** = 6. V j e r o j a t n o s t — **P** — se nađe interpretacijom u tabeli XXII. iz **Z**=0,95, dakle 21,7 i za **Z** = 1,0 . . . 25,5.

Prema tome za **Z** = 0,9779 vjerojatnost — **P** — je 1 : 23,2, da sorta **A** sadrži više masti od sorte **B**.

U praksi se drži, da je već vjerojatnost P . . . 1 : 40 statistički opravdana. Prema tome u našem primjeru nema opravdane razlike u sadržaju masti u sortama **A** i **B**.

Vidimo dakle, da tamo, gdje treba varijante jedne serije pokusa usporediti s odgovarajućim varijantama druge serije pokusa, najbolje odgovara vjerojatnost **P**, koja se izračuna po S t u d e n t o v o j m e t o d i. Ona nam je u tom slučaju ujedno vrlo dobra podloga, pomoću koje izvodimo pravilne zaključke.

6. Mjerenje točnosti neke razlike pomoću Kollerove tabele i dijagrama

Jedno isto svojstvo očituje se u različitim genotipovima vrlo različito. Opravdanost razlike između dva genotipa za jedno isto svojstvo možemo ustanoviti i pomoću Kollerovih tabela (vidi tab. X., str. 37 i dijagram sl. 6).

Postupak kod izračunavanja najbolje će nam ilustrirati ovaj primjer:

Pokusom smo htjeli ustanoviti, koja od dvije sorte ozime repice proizvedene u 5 različnih klimatskih i edafskih područja (dakle n = 5) daje veći prirod sjemena. Od sorte **A** dobiveni su prirodi i to u kraju: a . . . 14,1; b . . . 13,2; c . . . 12,5; d . . . 15,1 i e . . . 13,6 q/ha, a od sorte **B** prirodi u kraju a . . 13,8; b . . . 13,5; c . . . 12,1; d . . . 14,3 i e . . . 13,0 q/ha sjemena.

Da li sorta **A** bolje rodi od sorte **B**?

Da se uoči utjecaj klime i tla svakog proizvodnog područja, ustanovljena je za svako takvo područje razlika u prirodu sjemena između sorte **A** i **B**. Razlika u prinosu sjemena jedne i druge sorte, dakle A — B, je za proizvodno područje a . . . 14,1 — 13,8 = 0,3 q/ha; za područje b . . . 13,2 — 13,5 = — 0,3; c . . . 12,5 — 12,1 = 0,4; d . . . 15,1 — 14,3 = 0,8 i područje e . . . 13,6 — 13,0 = 0,6 q/ha.

Srednja je vrijednost gornjih razlika: $M_D = \frac{\Sigma(D)}{n} = \frac{1,8}{5} =$ = 0,36 u korist sorte **A**. Da li je ova razlika statistički opravdana?

Razlika A - B = D		D^2
a	0,3	0,09
b	— 0,3	0,09
c	0,4	0,16
d	0,8	0,64
e	0,6	0,36
$\Sigma D = 1,8$		$\Sigma D^2 = 1,34$

Treba izračunati srednju pogrešku: $m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{n}} = \sqrt{\frac{1,34}{5}} = = 0,517$$

$$m = \frac{0,517}{\sqrt{5}} = 0,231$$

Za n — 1 = 5 — 1 = 4 slobodna varijanta je **t** = 6,62 (vidi tab. X.). Dakle za m = 0,231 i srednju vrijednost razlike (M_D) = 0,36 su granice točnosti m×t=0,231×6,62 = 1,52922, a to znači, da je ova vrijednost veća od srednje vrijednosti. Prema tome razlika od 0,36 nije statistički opravdana, i nema dokaza, da je sorta **A** bolja od sorte **B**.

Ako je broj slobodnih varijanata veći od 10, ustanovljujemo **t** pomoću Kollerova dijagrama (sl. 6, str. 37).

7. Srednja i vjerojatna pogreška diferencije i sume

U poljoprivrednoj nam je praksi često od važnosti da znamo, jesu li brojčane razlike, a katkada i zbrojevi (sume) srednjih vrijednosti nekog svojstva varijaciono-statistički opravdane ili nisu.

Da bismo to utvrdili, poslužit ćemo se zakonom o p r e n o š e n j u p o g r e š k e. Po tomu je zakonu srednja pogreška diferencije (m_D) ili sume (m_S) jednaka drugom korijenu iz sume kvadrata pojedinih srednjih vrijednosti, dakle:

$$m_D = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

$$m_S = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots\ldots m_x^2}$$

a) S r e d n j a i v j e r o j a t n a p o g r e š k a d i f e r e n c i j e

Kod uspoređivanja rezultata različitih pokusa najčešće treba ustanoviti, da li je razlika između dvije srednje vrijednosti nekog svojstva varijaciono-statistički opravdana. To možemo

odrediti na različite načine, a jedan od njih je pomoću srednje pogreške diferencije.

S r e d n j a p o g r e š k a d i f e r e n c i j e j e d r u g i k o r i j e n i z z b r o j a k v a d r a t a s r e d n j i h p o g r e š a k a (m_1 i m_2) s r e d n j i h v r i j e d n o s t i (M_1 i M_2).

$$\text{Dakle: } m_D = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

P r i m j e r: a) U sortnom pokusu bile su uz druge sorte pšenice i sorte **A** i **B**, od kojih je svaka uzgajana na 10 pokusnih parcelica iste veličine. Prosječni prirodi zrna (M) po hektaru pšenice **A** i **B** s njihovim srednjim pogreškama bili su ovi:

Sorta **A**. . . . . $M_1 \pm m_1$ . . . 22,5 q/ha ± 0,659
Sorta **B**. . . . . $M_2 \pm m_2$ . . . 20,1 q/ha ± 0,732

Razlika: $M_1 — M_2$ = D . . . 2,4 q/ha

Dakle je razlika u prirodu između jedne i druge sorte **2,4** q/ha.

Srednja je pogreška ove razlike:

$$m_D = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{0,659^2 + 0,732^2} = 0,9944$$

Kad je omjer $\frac{D}{m_D}$ = 3 ili veći od 3, onda smatramo, da je razlika (D) varijaciono-statistički opravdana, jer je u tom slučaju vjerojatnost 1 : 22,5 da je ona sorta, od koje smo dobili veći prirod zrna, uistinu rodnija. Spomenuti omjer vrijedi kao mjerilo i kod različnih drugih pokusa u poljoprivredi na pr. kod pokusa s gnojivima, razmacima biljaka u polju, dobom sjetve, mliječnošću krava i sl.

U našem je primjeru $\frac{D}{m_D} = \frac{2,4}{0.9944}$ = 2,4135. Kako je ovaj omjer manji od 3 slijedi, da je razlika između srednjih vrijednosti M_1 i M_2 premalena, a njihove srednje pogreške m_1 i m_2 prevelike, a da bi se moglo ustvrditi, da je sorta pšenice **A** uistinu bolja od sorte **B**.

P r i m j e r: b) Prof. dr. Stj. Filipović je proučavao sadržaj vode u mlijeku u zimsko doba i uspoređivao ga sa sadržajem vode u mlijeku u ljetno doba. Pokuse je vršio s mlijekom krava fakultetskog dobra Maksimir.

U zimsko doba mlijeko je sadržavalo u prosjeku 86,62% ± ± 0,13 vode, a u ljetno doba 85,72% ± 0,1 vode. Dakle je razlika u sadržaju vode ljetnog i zimskog mlijeka 0,9%.

Zanima nas, je li ta razlika varijaciono-statistički opravdana. To ćemo ustanoviti na ovaj način:

Zimsko mlijeko 86,62% ± 0,13 vode
Ljetno mlijeko 85,72% ± 0,1 vode

Razlika D . . . . . 0,9% vode

$$m_D = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{0{,}13^2 + 0{,}1^2} = 0{,}164$$

$$\frac{D}{m_D} = \frac{0{,}9}{0{,}164} = 5{,}48$$

Budući da je taj omjer veći od 3, možemo sa sigurnošću ustvrditi, da je zimsko mlijeko u konkretnom slučaju sadržalo za 0,9% više vode od ljetnog mlijeka.

Ako mjesto srednjih pogrešaka **m** upotrebimo vjerojatne pogreške **E. P.**, dakle $M_1 \pm E.P_1$ i $M_2 \pm E.P_2$, onda računamo vjerojatnu pogrešku (**E. P.**$_D$) razlike u prirodu ($D = M_1 - M_2$) po ovoj formuli:

$$E.P._D = \sqrt{E.P._1^2 + E.P._2^2}$$

Pokusima je ustanovljeno, da je kod sitnih žitarica s razlikom u prirodu zrna od 2—3 q po hektaru između jedne i druge sorte omjer $\frac{D}{m_d}$ manji od 3. To znači, da je razlika premalena, a da bi bila varijaciono-statistički opravdana.

Kod poljskih je pokusa srednja odnosno vjerojatna pogreška srednjih vrijednosti obično veća od **5%**.

Gore spomenute formule za srednju i vjerojatnu pogrešku diferencije vrijede samo onda, ako istraživana svojstva nisu u međusobnoj povezanosti (korelaciji). Ako su ova svojstva korelativno vezana, eliminiramo pogreške pomoću metode najmanjih kvadrata. Formula za srednju pogrešku diferencije glasi za taj slučaj ovako:

$m_D = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2r\, m_1 \cdot m_2}$, a za vjerojatnu pogrešku diferencije:

$$E.P._D = \sqrt{E.P._1^2 + E.P._2^2 - 2r\, E.P_1 \cdot E.P_2}$$

r je korelacioni koeficijent (vidi str. 100).

b) Srednja i vjerojatna pogreška prosjeka srednjih vrijednosti m_p i E. $P._p$

Srednju pogrešku prosjeka od više srednjih vrijednosti izračunamo tako, da drugi korijen iz zbroja kvadrata pojedinih srednjih pogrešaka podijelimo s ukupnim brojem svih srednjih vrijednosti, dakle

$$m_p = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots . m_x^2}}{x}$$

Primjenu gornje formule pokazat ćemo najbolje na slijedećem primjeru:

Proveden je sortni pokus sa 6 različnih sorta ozimog ječma (Hordeum vulgare). Svaka je sorta u pokusu posijana na 5 parcelica. Iz priroda zrna preračunatog na hektar, izračunan je prosječan prinos zrna i srednja pogreška za svaku sortu napose. (Tab. XXIII.). Zbroj srednjih vrijednosti je $\Sigma M = 127{,}26$.

Prosječni prirod zrna svih sorata: $\frac{\Sigma M}{x} = \frac{127{,}26}{6} = 21{,}21$ q/ha.

Srednja pogreška prosjeka srednjih vrijednosti je prema tome:

$$m_p = \frac{\sqrt{\Sigma m^2}}{x} = \frac{\sqrt{60{,}8143}}{6} = \frac{7{,}798}{6} = 1{,}299$$

Na temelju tih brojeva možemo usporediti srednje vrijednosti pojedinih sorata s prosjekom srednjih vrijednosti svih sorata u pokusu. Razlike između priroda svake pojedine sorte i prosjeka priroda svih pokusnih sorata zajedno opterećene su jednom izvjesnom srednjom pogreškom. Nju ćemo izračunati po formuli $m_D = \sqrt{m^2 + m_p^2}$ (vidi rubriku 6 u tab. XXIII.).

Razlike u prirodu pojedinih sorata u nekom sortnom pokusu obično nisu velike. Dakako da valjane zaključke možemo izvoditi samo onda, kad su srednje vrijednosti (M) veće od 2 m %. Na temelju ovog postotka možemo pravilnije ocijeniti vrijednost pojedinih sorata i pomoću spomenute metode grupirati ih po visini prosječnog priroda.

Iz tab. XXIII. vidi se, da je prosječni prirod sorte br. 1 najveći; iza njega dolazi sorta br. 2. Kako je sorta br. 1 opterećena dosta velikom srednjom pogreškom, nije sigurno, da li ona tu rodnost dalje nasljeđuje.

Uzimajući u obzir nasljednu vrijednost u našem pokusu istraženih sorata, grupirat ćemo ih po visini njihova priroda najbolje tako, da izračunamo t. zv. koeficijent kolebanja (k).

Tab. XXIII.

1 Ozimi ječam br.	2 Prirod zrna q/ha $M \pm m$	3 m^2	4 $M - \frac{\Sigma M}{6} = D$	5 $m^2 + m^2_p$	6 $\sqrt{m^2 + m^2_p} = m_D$	7 $\frac{D}{m_D} = k$	8 Slijed sorta po prirodu
1	23,18 ± 4,47	19,9809	1,97	21.6679	4,6552	0,422	II
2	22,82 ± 1,38	1,9044	1,61	3,5914	1,895	0,849	I
3	21,35 ± 4,08	16,6464	0,14	18,3334	4,2813	0,033	III
4	21,03 ± 1,86	3,4596	− 0,18	5,1466	2,2687	− 0,079	IV
5	19,72 ± 3,99	15,7605	− 1,49	17,4475	4,1773	− 0,357	V
6	19,16 ± 1,75	3,0625	− 2,05	4,7495	2,1793	− 0,941	VI
	$\Sigma M = 127,26$	$\Sigma m^2 = 60,8143$	+ 3,72 − 3,72				

$$M = \frac{\Sigma M}{6} = \frac{127,26}{6} = 21,21$$

$$m_p = \frac{\sqrt{\Sigma m^2}}{6} = \frac{\sqrt{60,8143}}{6} = 1,299$$

$$m^2_p = 1{\cdot}687$$

Taj koeficijent izražava omjer između razlike (D) u prirodu jedne izvjesne sorte i prosjeka priroda svih sorata, te **srednje pogreške m_D spomenute razlike, dakle $\frac{D}{m_D} = k$.**

Iz toga nađemo slijed pokusnih sorata, prikazan u tab. XXIII.

8. Varijanca

a) Općenito

Po dosadašnjim se principima eksperimentalnog rada smatralo, da je pokus točno proveden samo onda, ako je na nj istovremeno utjecao što manji broj činilaca. Nastojalo se urediti pokus tako, da budu osim onog faktora, koji se želio proučiti, svi ostali faktori po mogućnosti konstantni. Ali u prirodi na neko svojstvo organizma utječe redovito vrlo velik broj činilaca. Njihovo je djelovanje veoma komplicirano. Oni utječu na svojstvo paralelno i komplementarno. Stoga je važno, da neko svojstvo pokusnog organizma istražimo pod utjecajem što većeg broja tih činilaca, jer su u tom slučaju zaključci mnogo točniji i općenitiji. To se najbolje provodi kompleksnom ili faktorijalnom podjelom pokusa. Ako želimo na pr. ustanoviti, koje sorte pšenice od onih, što se u većem broju proizvode u izvjesnom kraju, tom kraju najbolje i odgovaraju, onda je slika točnija, ako u sortni pokus uklopimo i vrstu tla (lagano i teško), gustoću sjetve i dobu sjetve.

Kod sortnih pokusa, pokusa s gnojenjem, ili pokusa s dubinom sijanja, gustoćom sjetve, dobom sjetve i t. d., pokusne smo parcelice dosada obično sistematski poredali u skupine u obliku šahovskog polja.

Na pr. trebalo je načiniti sortni pokus s 10 sorata pšenice (I—X) u peterostrukoj komparaciji i u 5 pojaseva. Sistematski raspored bio bi obično ovakav: (Sl. 12).

Sl. 12.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
IX	X	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
VII	VIII	IX	X	I	II	III	IV	V	VI
V	VI	VII	VIII	IX	X	I	II	III	IV
III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	I	II

U tom se slučaju za svaku sortu posebno izračunala srednja vrijednost za prirod i srednja pogreška svake srednje vrijednosti napose. Na temelju tako dobivenih pogrešaka izračunali smo srednje pogreške diferencije između dvije i dvije sorte. Ove srednje pogreške diferencije služile su nam kao mjerilo da ustanovimo, je li razlika u prosječnom prirodu (srednja vrijednost) ma koje dvije sorte sortnog pokusa varijaciono-statistički opravdana ili nije.

Kako su u gornjem slučaju pokusne sorte bile sistematski poredane, srednje se pogreške srednjih vrijednosti dobivenih priroda ne će posve podudarati sa srednjim pogreškama onih srednjih vrijednosti priroda, koje bismo dobili, da je naših 10 sorata na parceli bilo raspodijeljeno bez sistema.

F i s h e r je ustanovio, da nam pokus, u kojemu su sorte poredane bez sistema, daje točniju sliku o gospodarskoj vrijednosti pojedine sorte, negoli onaj sa sistematskom podjelom parcelica.

Za proučavanje pojedinih svojstava kod n e s i s t e m a t s k e podjele pokusnih parcelica najbolja je F i s h e r o v a a n a l i z a v a r i j a n c e, koja se u novije vrijeme mnogo upotrebljava.

Pod varijancom razumijevamo kvadratnu vrijednost standardne devijacije:

Ako na pr. želimo proučiti jedno svojstvo nekog određenog uzgoja goveda na osnovu istraživanja pojedinih individua (varijanata) kojih su vrijednosti mjerenog svojstva V_1, V_2, $V_3 \ldots V_n$, onda je prosječna vrijednost ili srednja vrijednost toga svojstva jednaka zbroju apsolutnih vrijednosti pojedinih varijanata ($V_1 + V_2 + V_3 \ldots V_n$) dividiranom s brojem svih istraženih individua — varijanata (**n**). Dakle:

$$\mathbf{M} = \frac{\Sigma V}{n}, \text{ dok je: } \sigma^2 = \frac{\Sigma (V - M)^2}{n} =$$

= kvadrat standardne devijacije.

Ako raspolažemo samo malim brojem varijanata, onda se služimo formulom: $\sigma^2 = \frac{\Sigma (V - M)^2}{n - 1}$

Varijancu analiziramo.

Kod toga izraz $\Sigma (V - M)^2$ razdijelimo na pojedine skupine, kojih varijaciju uvjetuju različni činioci.

Izraz za broj varijanata (**n**) smanjenih za 1, dakle (n—1), razdijelimo već prema broju skupina na stupnjeve neovisnih varijanata, (degrees of freedom). To će reći, da možemo od **n** varijanata, koje se nalaze u zbroju, slobodno izabrati samo (n—1), jer **n**-ta varijanta nije više slobodna, nego se ravna po ostalim (n—1) varijantama.

Treba voditi računa i o tome, da svaka vrijednost koja karakterizira neki uzorak i koja se upotrebljava za izračunavanje nekih drugih vrijednosti, smanjuje i broj neovisnih varijanata.

Tako je na pr. za varijacioni koeficijent $v = \frac{100\,\sigma}{\mathbf{M}}$ broj neovisnih varijanata $\Sigma n = n - 2$, jer prije toga treba izračunati $\mathbf{M}$ i σ.

Da u sortnom pokusu imamo 10 sorata, koje smo uz 5-erostruku repeticiju smjestili u 5 pojaseva, i bez sistema rasporedali na 50 parcelica, onda bi slučajna podjela ovih 10 sorata mogla biti i ovakova: (sl. 13).

Sl. 13

$VIII_1$	I_2	IX_3	I_4	II_5	VI_6	$VIII_7$	III_8	II_9	IV_{10}
X_{11}	VII_{12}	X_{13}	X_{14}	V_{15}	$VIII_{16}$	V_{17}	$VIII_{18}$	VII_{19}	IV_{20}
X_{21}	VII_{22}	II_{23}	II_{24}	III_{25}	V_{26}	VI_{27}	VII_{28}	II_{29}	IX_{30}
X_{31}	I_{32}	III_{33}	III_{34}	VII_{35}	$VIII_{36}$	IV_{37}	IX_{38}	VI_{39}	X_{40}
II_{41}	V_{42}	IX_{43}	IX_{44}	I_{45}	IV_{46}	III_{47}	VI_{48}	IV_{49}	I_{50}

Kako je n = 50 parcelica ili varijanata, to imamo ukupno n — 1 = 50 — 1 = 49 slobodnih varijanata.

Kod ove se podjele pogreška ukupnog pokusa sastoji od pogrešaka u prirodu pojedinih parcela.

U analizi varijance broj se neovisnih varijanata rasporedi ovako: (Tab. XXIV.)

Premda je princip, da svaki materijal, koji želimo varijaciono-statistički istražiti, mora predstavljati slučajni i neizabrani uzorak jednog varijacionog reda, ipak treba po mogućnosti

Tab. XXIV.

	Broj neovisnih varijanata
a) broj parcela: $n_a = 50$	$n_a - 1 = 50 - 1 = 49$
b) broj sorata: $n_b = 10$	$n_b - 1 = 10 - 1 = 9$
Razlika = pogreška: $(n_a - 1) - (n_b - 1) = 40$	

ograničiti pogreške nastale heterogenošću tla. To možemo učiniti na taj način, da pokusne parcele svrstamo u skupine pojaseva (blocks) i to tako, da se u svakom pojasu nađe svih 10 sorata, ali bez sistema. Na pr. (sl. 14).

Sl. 14.

VII	IV	IX	V	I	III	VI	II	VIII	X	Pojas A
VI	IX	V	VIII	X	II	IV	I	III	VII	Pojas B
X	IV	VII	I	V	VI	II	VIII	IX	III	Pojas C
II	VII	IX	V	III	IV	X	I	VII	VI	Pojas D
IV	VI	X	VIII	II	VII	IX	III	V	I	Pojas E

Ovom smo prilikom ukupnu varijancu razdijelili na sortnu varijancu i na pojasnu (blockvariance).

Pojasna je varijanca uvjetovana heterogenošću tla.

Kod izvjesne je ukupne varijance pogreška u pokusu to manja, što je veća pogreška u pojasu. Pogreška za sortu mora biti dakako što manja. Prema tome treba rasporediti parcelice tako, da može varijanca između pojasa biti veća, a u samom pojasu što manja.

Gdje je 10 sorata u 5-erostrukoj komparaciji smješteno u 5 pojaseva, a u svakom se pojasu nalazi svih deset sorata poredanih bez sistema (sl. 14), pogreška je u pokusu i broj neovisnih varijanata ovaj: (Tab. XXV.).

Tab. XXV.

	Broj neovisnih varijanata
a) broj parcela: $n_a = 50$	$n - 1 = 50 - 1 = 49$
b) broj sorata: $n_b = 10$	$n - 1 = 10 - 1 = 9$
c) broj pojasa: $n_c = 5$	$n - 1 = 5 - 1 = 4$
Razlika = pogreška	$(n_a - 1) - [(n_b - 1) + (n_c - 1)] = 36$

Kod ove je raspodjele parcela i sorata pogreška manja (36) nego u prvoj raspodjeli (40) (vidi str. 80).

Pogreška u pokusu još je manja, ako pokusne parcelice rasporedimo u obliku kvadrata (latin square). Najbolji su pak oni pokusi, kod kojih je broj sorata odnosno pokusa na pr. s različitim gnojenjem, dubinom sjetve, različnim razmacima među biljkama, gustoćom sjetve i t. d. jednak broju komparacija.

P r i m j e r: Treba izvršiti pokus sa gustoćom sjetve kod lana. U tu svrhu posijali bismo 5 različnih količina sjemena na jedinicu površine, a svaku količinu u pokusu komparirali bismo 5 puta. Parcelice bismo smjestili u kvadrat i to tako, da je u svakom horizontalnom i u svakom vertikalnom pojasu poredano bez sistema svih 5 količina sjemena (sl. 15).

Sl. 15.

II	IV	V	III	I
III	II	IV	I	V
IV	V	I	II	III
I	III	II	V	VI
V	I	III	IV	II

(Rimskim su brojevima označene parcelice s pojedinim količinama sjemena po hektaru.)

Takva se podjela može u praksi upotrebiti onda, ako je broj pokusnih članova malen. Tom se podjelom dadu jako eliminirati pogreške nastale heterogenošću tla.

Broj neovisnih varijanata i pogrešku pokusa s gustoćom sjetve lana ustanovljujemo ovako: (Tab. XXVI.).

Tab. XXVI.

	Broj neovisnih varijanata
a) parcelica: $n_a = 25$	$n_a - 1 = 25 - 1 = 24$
b) različitih gustoća sjetve: $n_b = 5$	$n_b - 1 = 5 - 1 = 4$
c) horizontalnih pojasa: $n_c = 5$	$n_c - 1 = 5 - 1 = 4$
d) vertikalnih pojasa: $n_d = 5$	$n_d - 1 = 5 - 1 = 4$
	Razlika = pogreška $(n_a - 1) - [(n_b - 1) + (n_c - 1) + (n_d - 1)] = 12$

b) **Primjenu Fisherove metode na nekvadratnoj podjeli parcelica** prikazat ćemo na slijedećim primjerima:

Postavljen je sortni pokus od 10 različnih sorata kukuruza (koje su označene rimskim brojevima) u 5-erostrukom ponavljanju. Sorte su raspodijeljene u 5 pojasa tako, da je u svakom pojedinom pojasu slobodno smješteno svih 10 sorata. Slučajna podjela tih sorata u pojedinim pojasima prikazana je na slici broj 16.

Sl. 16.

II	IV	VIII	V	VII	I	X	VIII	VI	IX
III	I	VIII	VI	X	II	IV	VII	VII	IX
I	X	V	IV	II	VIII	III	VI	IX	VII
VI	VII	IX	V	III	VI	VIII	II	IV	I
X	II	IX	IV	VII	VIII	VI	I	V	III

Prirodi pojedinih sorata na ovim parcelicama (preračunati na hektar — q/ha) bili su slijedeći: (Tab. XXVII.)

Tab. XXVII.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Suma pojasa
	28,7	30,4	29,1	27,2	28,4	26,7	25,6	30,2	28,6	31,9	286,80
	27,4	29,7	28,3	26,4	27,9	25,8	25,0	29,2	26,9	30,3	276,90
	29,6	30,8	30,2	28,5	29,3	27,4	26,1	30,7	28,2	30,7	291,50
	26,3	28,4	27,4	26,1	27,2	25,5	25,3	29,1	26,1	29,1	270,50
	27,4	28,9	28,9	26,9	28,1	26,0	26,5	28,6	26,8	28,5	276,20
Suma $\Sigma = 139,4 = x_s$		148,2	143,5	135,1	140,9	131,4	128,5	147,8	136,6	150,5	$\Sigma(x) = 1401,9$
Prosjek $M = 27,88$		29,64	28,7	27,02	28,18	26,28	25,7	29,56	27,32	30,1	$\frac{\Sigma(x)}{n_s} = \frac{1401,9}{10} = 140,19$

Analiza varijance našeg sortnog pokusa je slijedeća:

1. Ukupna (totalna) varijanca: $\Sigma(x^2) - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T}$

2. Skupinska (blocks) (pojasna) varijanca: $\frac{\Sigma (x^2_B)}{n_S} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T}$

3. Sortna varijanca: $\frac{\Sigma (x^2_S)}{n_B} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T}$

Oznake se odnose na ova svojstva:

x = prirodi pojedinih parcela preračunati na hektar,
X_B = ukupni prirod jedne skupine (bloka-pojasa),
n_s = broj pokusnih sorata (= 10),
x_s = ukupni prirod jedne sorte sa 5 parcelica
n_T = broj svih pokusnih parcela (= 50),
n_B = broj skupina (blokova) koje kompariramo (= 5).

Za računanje varijance trebamo još i slijedeće vrijednosti: Zbroj kvadrata od: α) priroda pojedinih parcela preračunatih na ha, β) sorata i γ) skupina (blokova — pojasa).

Kvadrati priroda po hektaru s pojedinih parcelica i za pojedine sorte sakupljeni su u tabeli XXVIII.

1. Totalna varijanca: $\Sigma (x^2) - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} =$

$$= 39.444,15 - \frac{1401,9^2}{50} = \mathbf{137,6778}$$

$$\frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{1401,9^2}{50} = 39.306,4722$$

2. Skupinska (blokna) varijanca:

$$\frac{\Sigma (x^2_B)}{n_S} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{393.356,79}{10} - 39.306,4722 =$$

$$= \mathbf{29,2068} = \text{skupinska varijanca.}$$

X_B	X^2_B
286,8	82254,24
276,9	76673,61
291,5	84972,29
270,5	73170,25
276,2	76286,44
	393.356,79 = $\Sigma (X^2_B)$

Tab. XXVIII.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
823,69	924,16	846,81	739,84	806,56	712,89	655,36	912,04	817,96	1017,61
750,76	882,09	800,89	696,96	778,41	665,64	625,00	852,64	723,61	918,09
876,16	948,64	912,04	812,25	858,49	750,76	681,21	942,49	795,24	942,49
691,69	896,56	750,76	681,21	739,84	650,25	640,09	846,81	681,21	846,81
750,76	835,21	812,25	723,61	789,61	676,00	702,25	817,96	718,24	812,25
3893,06	4396,66	4122,75	3653,87	3972,91	3455,54	3303,91	4371,94	3736,26	4537,25

$\Sigma (x^2) = 39.444,15$

3. Sortna varijanca: $\frac{\Sigma(x^2_s)}{n_B} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{197.029,69}{5} -$

$- 39.306,4722 =$ **99,4658** = sortna varijanca.

X_S	X^2_S
139,4	19.432,84
148,2	21.963,24
143,5	20.592,25
135,1	18.252,01
140,9	19.852,81
131,4	17.269,64
128,5	16.512,25
147,8	21.844,84
136,6	18.659,56
150,5	22.650,25
$\Sigma(X^2_S) =$	197.029,69

Dakle analiza varijance našeg sortnog pokusa s kukuruzom je ovakva: (Tab. XXIX.)

Pomoću varijance pogreške ustanovit ćemo, kakova je varijanca u pojedinim komponentama.

Kad bi na pr. sortna varijanca bila približno jednaka varijanci pogreške, onda između sorata ne bi bilo statistički opravdanih razlika.

Isto vrijedi i za varijancu skupina (blokova — pojasa).

Jesu li spomenute razlike statistički opravdane ili nisu, najbolje možemo ustanoviti pomoću F i s h e r o v e vrijednosti: $z = \frac{1}{2}\ln\sigma^2_1 - \frac{1}{2}\ln\sigma^2_2$, gdje su σ^2_1 i σ^2_2 prosjeci kvadrata onih komponenata, koje uspoređujemo.

Prema tome **Z** je razlika od ½ p r i r o d n i h logaritama (ln) od obaju σ^2.

Po F i s h e r o v i m tabelama ustanovimo, za koju je vrijednost z = 5% (P = 0,05), 1% (P = 0,01) ili 0,1% (P=0,001), ako imamo 2 komponente (svojstva) od $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ individua.

Tab. XXIX.

	Neovisnih varijanata	vrst varijance	Prosječna var. $= \frac{\text{var.}}{n-1}$	1/2 ln
a) ukupno parcelica $n_T = 50$	$n_T - 1 =$ $= 50 - 1 = 49$	Totalna varijanca 137,6778		
b) skupina blokova-pojasa $n_B = 5$	$n_B - 1 =$ $= 5 - 1 = 4$	Skupinska var. 29,2068	29,2067 : 4 = = 7,3017	0,99406
c) sorata $n_S = 10$	$n_S - 1 =$ $= 10 - 1 = 9$	Sortna var. 99,4658	99,4658 : 9 = = 11,0517	1,20129
Razlika = = pogreška	$(n_T - 1) - [(n_B - 1) + (n_S - 1)] =$ $= 49 - (4 + 9) = 36$	Var. pogreške = tot. var. — (var. skup. + var. sorta) = = 9,0052	9,0052 : 36 = = 0,25	—0,69315

Za sortnu je varijancu Z=1,20129 — (—0,69315)=1,89444.

Opravdanost ove vrijednosti utvrđujemo po F i s h e r o v o j tabeli (Tab. XXX.) za 5% (str. 88). U našem je slučaju n_1 = 4, jer ima (5 — 1 sorta) i n_2 = 36 (razlika = pogreška), dakle **z** = 0,4852, a to znači, da u 5% od svih slučajeva može biti vrijednost veća od 0,4852. Prema tome je naša razlika od z = 1,89444 opravdana.

Tek kad ustanovimo, da su razlike između sorata biometrički opravdane, treba izračunati opću pogrešku za prirod sorata.

Raspodjela z za 5%

Tab. XXX.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2·5421	2·6479	2·6870	2·7071	2·7194	2·7276	2·7380	2·7484	2·7588	2·7693
2	1·4592	1·4722	1·4765	1·4787	1·4800	1·4808	1·4819	1·4830	1·4840	1·4851
3	1·1577	1·1284	1·1137	1·1051	1·0994	1·0953	1·0899	1·0842	1·0781	1·0716
4	1·0212	·9690	·9429	·9272	·9168	·9093	·8993	·8885	·8767	·8639
5	·9441	·8777	·8441	·8236	·8097	·7997	·7862	·7714	·7550	·7368
6	·8948	·8188	·7798	·7558	·7394	·7274	·7112	·6931	·6729	·6499
7	·8606	·7777	·7347	·7080	·6896	·6761	6576	·6369	·6134	·5862
8	·8355	·7475	·7014	·6725	·6525	·6378	·6175	·5945	·5682	·5371
9	·8163	·7242	·6757	·6450	·6238	·6080	·5862	·5613	·5324	·4979
10	·8012	·7058	·6553	·6232	·6009	·5843	·5611	·5346	·5035	·4657
11	·7889	·6909	·6387	·6055	·5822	·5648	·5406	·5126	·4795	·4387
12	·7788	·6786	·6250	·5907	·5666	·5487	·5234	·4941	·4592	·4156
13	·7703	·6682	·6134	·5783	·5535	·5350	·5089	·4785	·4419	·3957
14	·7630	·6594	·6036	·5677	·5423	·5233	·4964	·4649	·4269	·3782
15	·7568	·6518	·5950	·5585	·5326	·5131	·4855	·4532	·4138	·3628
16	·7514	·6451	·5876	·5505	·5241	·5042	·4760	·4428	·4022	·3490
17	·7466	·6393	·5811	·5434	·5166	·4964	·4676	·4337	·3919	·3366
18	·7424	·6341	·5753	·5371	·5099	·4894	·4602	·4255	·3827	·3253
19	·7386	·6295	·5701	·5315	·5040	·4832	·4535	·4182	·3743	·3151
20	·7352	·6254	·5654	·5265	·4986	·4776	·4474	·4116	·3668	·3057
21	·7322	·6216	·5612	·5219	·4938	·4725	·4420	·4055	·3599	·2971
22	·7294	·6182	·5574	·5178	·4894	·4679	·4370	·4001	·3536	·2892
23	·7269	·6151	·5540	·5140	·4854	·4636	·4325	·3950	·3478	·2818
24	·7246	·6123	·5508	·5106	·4817	·4598	·4283	·3904	·3425	·2749
25	·7225	·6097	·5478	·5074	·4783	·4562	·4244	·3862	·3376	·2685
26	·7205	·6073	·5451	·5045	·4752	·4529	·4209	·3823	·3330	·2625
27	·7187	·6051	·5427	·5017	·4723	·4499	·4176	·3786	·3287	·2569
28	·7171	·6030	·5403	·4992	·4696	·4471	·4146	·3752	·3248	·2516
29	·7155	·6011	·5382	·4969	·4671	·4444	·4117	·3720	·3211	·2466
30	·7141	·5994	·5362	·4947	·4648	·4420	·4090	·3691	·3176	·2419
40	·7037	·5866	·5217	·4789	·4479	·4242	·3897	·3475	·2920	·2057
60	·6933	·5738	·5073	·4632	·4311	·4064	·3702	·3255	·2654	·1644
120	·6830	·5611	·4930	·4475	·4143	·3885	·3506	·3032	·2376	·1131
∞	·6729	·5486	·4787	·4319	·3974	·3706	·3309	·2804	·2085	0

Ova se pogreška izračuna ovako:
varijanca jedne parcelice (Tab. XXIX.) 0,25
varijanca jedne sorte u peterostrukoj komparaciji 5×0,25=1,25
pogreška: m = $\sqrt{\text{varijanca jedne sorte}} = \sqrt{1,25}$ = 1,5, a u postocima:

$$m\% = \frac{m \times 100}{\frac{\Sigma x}{n_s}} = \frac{1,5 \times 100}{140,19} = \mathbf{1,69}$$

$$\frac{\Sigma x}{n_s} = \frac{1401,9}{10} = 140,19$$

Pogreška diferencije:

$$m_D = m\,\% \sqrt{2} = 1,69 \times 1,4124 = 2,389$$

Signifikantna je razlika u prirodu tek kod 2×2,389 = = 4,778%.

Ako potonju vrijednost upotrebimo kao mjerilo razlike između pojedinih sorata i ako uzmemo prirod sorte I kao 100, onda su prirodi ostalih 9 pokusnih sorata ovi: (Tab. XXXI.)

Tab. XXXI.

Sorta	apsolutni prirodi (Tab. XXVII.)	Relativni prirod sjemena
I	27,88	100,00
II	29,64	106,31
III	28,70	102,94
IV	27,02	96,91
V	28,18	101,07
VI	26,28	94,26
VII	25,70	92,18
VIII	29,56	106,02
IX	27,32	97,99
X	30,10	107,96

Signifikantnu razliku od 4,778% obzirom na sortu I imaju prema tome samo sorte II, VIII i X, a sorte IV, VI i VII izrazito su loše.

c) Kvadratna podjela pokusnih parcela

Želimo ustanoviti, kako utječu na prinos sjemena soje tri različne vrste bakterijskog cjepiva. U tu svrhu postavit ćemo pokus u četverostrukoj komparaciji. Na kontrolnim parcelama (K) posijat ćemo necijepljeno sjeme.

Parcelice zasijane cijepljenim sjemenom označene su s: **A**, **B** i **C**; one su nesistematski poredane u obliku kvadrata (latin square): (Sl. 17).

Sl. 17.

K	B	C	A
A	K	B	C
C	A	K	B
B	C	A	K

Prirod sjemena na pojedinim parcelicama, preračunat na hektar, prikazan je u tabeli XXXII.

Tab. XXXII.

					x_h	x^2_h
	K 18.73	A 18,93	C 19,16	B 19,42	76,24	5.812,5376
	B 19,68	C 18,95	K 17,26	A 18,51	74,40	5.535,3600
	A 18,86	K 16,38	B 20,03	C 19,28	74,50	5.557,7025
	C 18,76	B 19,35	A 19,32	K 17,84	75.27	5.665,5729
x_v	76,03	73,61	75,77	75,05	$\Sigma x_h = 300,46$	$\Sigma x^2_h = 22.571,173$
x^2_v	5.780,5609	5.418,4321	5.741,0929	5.632,5025		

$\Sigma x^2_v = 22.572,5884$

Za izračunavanje varijance i za analizu varijance treba odrediti slijedeće vrijednosti:

a) sumu priroda u sjemenu u svakom horizontalnom redu (h),
b) sumu svih horizontalnih redova,
c) kvadrate ukupne sume priroda u svakom horizontalnom redu zasebno,
d) sumu tih kvadrata,
e) sumu priroda u svakom vertikalnom redu (v) zasebno,
f) kvadrate tih zbrojeva,
g) sumu kvadrata priroda pojedinih parcelica (tab. XXXIII).

Tab. XXXIII. **KVADRATI:**

	K 350,8129	A 358,3449	C 367,1056	B 377,1364
	B 387,3024	C 359,1025	K 297,9076	A 342,6201
	A 355,6996	K 268,3044	B 401,2009	C 371,7184
	C 351,9876	B 374,4225	A 373,2624	K 318,2656
x^2	1.445,7525	1.360,1743	1.439,4765	1.409,7405 = x^2

$\Sigma(x^2_T) = 5.655,1438$

Nadalje moramo sakupiti u posebnu tabelu prirode svake cijepljene i necijepljene parcelice (Tab. XXXIV.)

Tab. XXXIV.

	K	A	B	C	
	18,73	18,93	19,42	19,16	
	17,26	18,51	19,68	18,95	
	16,38	18,86	20,03	19,28	
	17,84	19,32	19,35	18,76	
x	70,21	75,62	78,48	76,15	$\Sigma x = 300,46$
Prosjek $\frac{x}{4}$	17,5525	18,9050	19,6200	19,0375	$\Sigma\frac{x}{4} = 75,115$
x^2	4.929,4441	5.718,3844	6.159,1104	5.798,8225	Σx^2_p 22.605,7614
	$\frac{x}{4} = 100$	107,7054	111,7789	108,4603	

$n_T = 16$ (pokusnih parcelica)

$n_v = 4$ (broj vertikalnih pojasa)

$n_h = 4$ (broj horizontalnih pojasa)

Nakon toga sve te sume zbrojimo.

Iz navedenih podataka izračunamo pojedine varijance po ovim formulama:

Ukupna ili totalna varijanca (Tab. XXXIII. i XXXII.):

$$\Sigma(x^2_T) - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = 5.655,1431 - \frac{300,46^2}{16} = \mathbf{12,8831}$$

$$\frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{300,46^2}{16} = 5,642.26 \text{ (Tab. XXXII.)}$$

Varijanca horizontalnih redova (h): (Tab. XXXII)

$$\frac{\Sigma(x^2_h)}{n_v} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{22.571,173}{4} - 5.642,26 = \mathbf{0,53}$$

Varijanca vertikalnih redova (v): Tab. (XXXII.)

$$\frac{\Sigma(x^2_v)}{n_h} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{22.572,5884}{4} - 5.642,26 = \mathbf{0,8871}$$

Varijanca pokusa (cijepljena i necijepljena soja): (Tab. XXXIV. i XXXII.)

$$\frac{\Sigma(x^2_p)}{n_{rep.}} - \frac{(\Sigma x)^2}{n_T} = \frac{22.605,7614}{4} - 5.642,26 = \mathbf{9,1803}$$

Nadalje treba izračunati varijancu pogreške i vrijednost **Z**. (vidi tabelu XXXV.).

Da li je ova razlika statistički opravdana, ustanovljujemo po Fisherovoj tabeli (Tab. XXX.) za Z od 5%. Kod nas je $n_1=3$, jer je za pokus (4—1) = 3 neovisnih varijanata, a za $n_2 = 6$, a to izlazi iz neovisnih varijanata za razliku = pogrešku. Prema tome je **Z** = 0,7798; to znači, da samo u 5% može biti ta vrijednost slučajno prekoračena.

Kako je u našem slučaju Z = 1,05507, to je ta razlika biometrički posve opravdana. Dakle ima opravdanih razlika u prinosu sjemena između necijepljene soje i soje cijepljene različnim bakterijskim cjepivima.

Tab. XXXV.

	Neovisnih varijanata	Vrsta varijance	Prosječna varijanca $\frac{var}{n-1}$	1/2 ln
Ukupno parcelica $n_T = 16$	$n_T - 1 = 16 - 1 = 15$	Totalna varijanca 12,8831		
Horizontalnih redova $n_h = 4$	$n_h - 1 = 4 - 1 = 3$	Varijanca horizontalnih redova 0,53	$\frac{0,53}{3} = 0,1766$	—0·86693
Vertikalnih redova $n_v = 4$	$n_v - 1 = 4 - 1 = 3$	Varijanca vertikalnih redova 0,8871	$\frac{0,8871}{3} = 0,2957$	—0·60921
Pokus (cij. + necij) $n_p = 4$	$n_p - 1 = 4 - 1 = 3$	Varijanca pokusa 9,1803	$\frac{9,1803}{3} = 3,0601$	0·55923
Razlika = = pogreška	$(n_T - 1) - [(n_h - 1) + (n_v - 1) + (n_p - 1)] = (16 - 1) - [(4 - 1) + (4 - 1) + (4 - 1)] = 6$	Varijanca pogreške 2,2257	$\frac{2,2257}{6} = 0,37095$	—0·49584

Za varijancu pokusa (cijepljeno i necijepljeno) je

Z = 0,55923 — (—0,49584) = 1,05507

Pogrešku diferencije izračunat ćemo na slijedeći način:

prosječna varijanca jedne parcelice (pogreške) $= 0{,}37095$
varijanca jednog cijepljenja
ili necijepljenja (4 komparacije) $4 \times 0{,}37095 = 1{,}4838$
pogreška: $m = \sqrt{\text{varijanca}} = \sqrt{1{,}4838} = 1{,}2183$

$$m\% = \frac{1{,}2183 \times 100}{75{,}115} = 1{,}6221$$

Pogreška diferencije $= m\sqrt{2} = 1{,}6221 \times 1{,}4142 = 2{,}29397$

Dakle je signifikantna razlika u prinosu sjemena kod $2 \cdot 2{,}29397 = 4{,}58794\%$.

Kad s tim mjerilom (4,58794%) usporedimo prirode necijepljene soje (K) = 100 s cijepljenim A, B i C izlazi: (Tab. XXXVI.)

Tab. XXXVI.

Soja	Relativni prirodi	Apsolutni prirodi
K	100	17,5525
A	107,71	18,9050
B	111,78	19,6200
C	108,46	19,0375

Vidimo, da su sa svim cjepivima postignuti opravdano bolji prirodi u poredbi s prinosom necijepljene soje.

B — 2. BIOMETRIKA KORELACIJE

Općenito

Do sada smo obrađivali varijaciono-statistički svako pojedino svojstvo organizma zasebno. Istraživajući različna svojstva jednog istog organizma opažamo, da neka od njih uvijek dolaze u zajednici. Kažemo, da između takvih svojstava ima neka ovisnost ili korelacija.

Na pr. brašnasto zrno pšenice sadržava manje bjelančevina nego caklavo. Zrno zobi s mnogo masti lakše je od zrna s manje masti. Zrno ječma s više bjelančevina teže je od zrna s manjom količinom bjelančevina. Sjeme soje sa više masti sadržava manje bjelančevina nego zrno s manje masti i t. d.

Za oplemenjivanje gospodarskih biljaka i životinja vrlo je važno da doznamo, koja su svojstva organizma međusobno ovisna, a koja su neovisna. Kad to doznamo, treba nam proučiti samo ono svojstvo, koje se dade lakše i brže istražiti, a onda po njemu zaključujemo, kakva je vrijednost ostalih svojstava.

Po Johannsenu su organizmi »sistemi u dinamičkoj ravnoteži«. Razlikujemo: a) f i z i o l o š k e k o r e l a c i j e t. j. fiziološke povezanosti pojedinih organa u organizmu kao i međusobni utjecaj gena, koji putem spolnih stanica (gameta) dolaze u novi organizam, b) k o r e l a t i v n i v a r i j a b i l i t e t t. j. varijabilitet u povezanosti svojstava jednog organizma u poredbi s drugim organizmom.

Ovdje nas specijalno interesira k o r e l a t i v n i v a r i j a b i l i t e t t. j. slučajevi, gdje treba ustanoviti, da li pojedina svojstva organizma variraju ovisno ili neovisno o drugim svojstvima.

Konstantnu vezu dviju veličina zovemo u matematici funkcijom. U matematičkoj funkciji možemo prvu veličinu izračunati iz druge, i obratno. Određenoj nekoj vrijednosti jedne veličine odgovara samo jedna određena vrijednost druge veličine. Na pr.

ako je y = 4, i ako je x = 3, onda je xy = 12. Ovdje su poznate uzročne veze.

Kod korelativnog varijabiliteta osim poznatih uzroka ima i nepoznatih tako, da se iz jednog svojstva jedne varijante ne može točno unaprijed odrediti i drugo njezino svojstvo. Dakle, jedno će se svojstvo izvjesnog organizma razviti do izvjesnih granica različito, ako se razvija pod drugim intenzitetom vanjskih faktora. Prema tome ono varira.

Što je više poznatih činilaca, koji djeluju na istraživana svojstva, to se točnije može unaprijed odrediti veza među tim svojstvima. Istražujemo li samo jednu ili vrlo mali broj varijanata (organizama), onda radi event. jačeg utjecaja kojeg nepoznatog činioca na promjenu nekog svojstva ne možemo naći povezanost s kojim drugim svojstvom, makar ona i postojala. Tek kod velikog broja varijanata može se točnije odrediti, jesu li neka svojstva organizma povezana (u korelaciji) ili nisu.

Naučenjaci su nastojali da izrade matematičku metodu, kojom bi se dao mjeriti stupanj korelacije.

Jednu je takvu metodu izradio poznati biolog G a l t o n. Kasnije su ovu metodu usavršili i neki drugi naučenjaci.

Gdje su dva svojstva međusobno linearno povezana, istražujemo jačinu korelacije najčešće po B r a v a i s o v o j m e t o d i. Ovom se metodom izračunava t. zv. k o r e l a c i o n i k o e f i c i j e n t, a označujemo ga sa **r**.

U pređašnjim poglavljima izračunali smo samo neke varijaciono-statističke vrijednosti za duljinu klasa i broj klasića kod pšenice (tab. III. i tab. VII.). Zanima nas sada na pr., da li su duljina klasa i broj klasića na klasu međusobno povezana svojstva, a ako jesu, kakva je jačina njihove povezanosti.

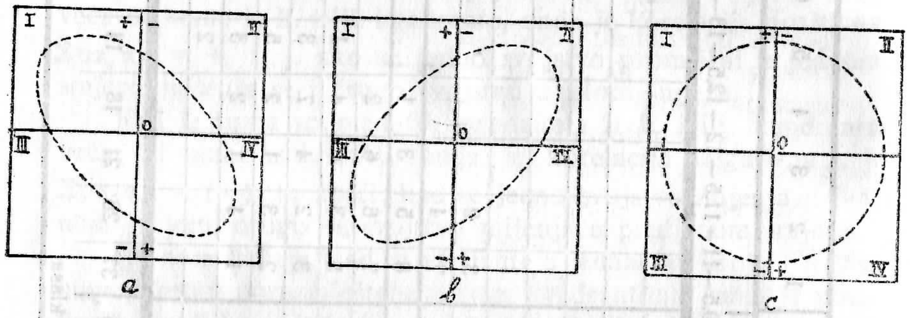
Da se pronađe event. zavisnost između tih dvaju svojstava, treba najprije izraditi t. zv. k o r e l a c i o n u t a b e l u. U toj se tabeli svaka varijanta smjesti u onaj varijacioni red, koji joj pripada po njezinoj duljini klasa i broju klasića.

Jedno svojstvo t. zv. s u p o n i r a n o označit ćemo sa **x**, a drugo »r e l a t i v n o« sa **y**. Posve je svejedno, koje ćemo svojstvo uzeti za suponirano, a koje za relativno. Ako su dva svojstva u međusobnoj ovisnosti (korelaciji), onda varijanta V obzirom na svojstvo **x** može varirati u izvjesnim granicama, koje određuje svojstvo **y**.

Raspored svih varijanata V_x za svojstvo **x** zavisi o svojstvu **y**, a raspored svih varijanata V_y za svojstvo **y** zavisi o svojstvu **x**. K o r e l a c i o n a t a b e l a za duljinu klasa i broj klasića na klasu je ovakova: (Tab. XXXVII).

Za različite parove svojstava korelacione su tabele različite. Raspored i frekvencija varijanata u tim tabelama zavisi o tome, kako su jako međusobno povezana svojstva, koja sačinjavaju neki istraživani par.

Općeniti oblici takvih tabela mogu biti i ovakvi:



Sl. 18.

Sl. br. 18 a) pozitivna korelacija, b) negativna korelacija i c) korelacije nema.

Prema tome zavisnost ili korelacija između dva svojstva može biti ili pozitivna (sl. a) ili negativna (sl. b).

Ako su svojstva međusobno nezavisna, onda su varijante poredane po čitavoj korelacionoj tabeli tako, da posve zapremaju površinu kruga, kako se vidi na sl. pod c).

Vrstu korelacije (+), (—) ili (0) i njezinu jačinu najbolje karakterizira produkt razmaka pojedinih varijanata od srednje vrijednosti M_x za suponovano i M_y za relativno svojstvo.

Ako u našoj korelacionoj tabeli za svojstvo klasa pšenice povučemo vertikalnu crtu u razredu, u kojemu se nalazi srednja vrijednost (M_x) za s u p o n o v a n o svojstvo (x), i horizontalnu crtu u razredu u kojemu se nalazi srednja vrijednost (M_y) za svojstvo (y), razdijeli se korelaciona tabela na četiri kvadranta. Točku, gdje se ove crte križaju, označit ćemo sa 0. (Slika 18).

Na horizontalnoj su crti desno od 0 pozitivne, a lijevo negative varijante. Na vertikalnoj crti pozitivne su varijante ispod

Tab. XXXVII.

a_x	Ay	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	px
	x \ y	6 — 6,5	— 7	— 7,5	— 8	— 8,5	— 9	— 9,5	—10	—10,5	—11	—11,5	—12	—12,5	—13	—13,5	—14	—14,5	—15	Broj klasića
−7	11	1	1	1					I.										II.	3
−6	12	2	3	2	2	1														10
−5	13		2	4	5	3	2													16
−4	14		2	3	8	6	7	1	1											28
−3	15			2	4	9	12	5	6	2	1									41
−2	16				3	5	9	18	14	5	3	2								59
−1	17				1	2	5	11	18	9	7	4								57
0	18					1	4	9	8	10	8	5	3	1						49
1	19	III.						3	5	9	7	6	6	2					IV.	38
2	20							1	3	6	5	3	6	4	1					29
3	21								1	3	3	2	4	7	3	2				25
4	22									1	2	3	1	2	5	4	1			19
5	23										1	1	1	2	3	3	3	1		15
6	24														2	1	2	1	1	7
7	25																1	2	1	4
	Py	3	8	12	23	27	39	48	56	45	37	26	21	18	14	10	7	4	2	n = 400

Ax

Dužina klasa

horizontalne linije a negativne su iznad nje.

Tako nastaju pozitivni i negativni razmaci pojedinih varijanata od srednjih vrijednosti. Produkti tih razmaka su ili pozitivni ili negativni.

Ako spomenute kvadrante označimo s I, II, III, i IV (vidi korelacionu tab. XXXVII. i sliku br. 18), onda su produkti razmaka pojedinih varijanata $\Sigma p\alpha_x \alpha_y$ obzirom na srednju vrijednost za I. i IV. kvadrant p o z i t i v n i, a za II. i III. kvadrant su n e g a t i v n i.

Ako je suma spomenutih produkata iz I. i IV. kvadranta veća od sume iz II. i III. kvadranta, onda je korelacija pozitivna $\Sigma p\alpha_x \alpha_y = +$ t. j. ako se jedno svojstvo promijeni u jednom smjeru, mijenja se i drugo svojstvo u istom smjeru.

Kad je suma spomenutih produkata iz II. i III. kvadranta veća od sume iz I. i IV., onda je korelacija negativna t. j. $\Sigma p\alpha_x \alpha_y = (-)$; to znači: kad se jedno svojstvo mijenja u jednom smjeru, drugo se svojstvo mijenja u protivnom smjeru.

U onom slučaju, kad su varijante u jednakom broju i jednakom poretku porazmještene u svim kvadrantima, suma je pozitivnih produkata jednaka sumi negativnih produkata, dakle $\Sigma p\alpha_x \alpha_y = 0$ i istraživana svojstva nisu međusobno povezana.

Korelacija je to jača, što je razlika između sume produkata iz I + IV i II + III kvadranta veća. Jačina pak zavisnosti jednog svojstva od drugog ne zavisi samo o veličini spomenute razlike, već također i o broju svih varijanata (**n**) i o varijabilitetu (α_x i α_y) suponovanog i relativnog svojstva. Dakle, pravi se stupanj korelacije može izračunati tako, da se razlika spomenutih produkata iz I + IV i iz II + III kvadranta podijeli s produktom dobivenim od broja svih varijanata (**n**) i standardne devijacije α_x suponovanog i α_y od relativnog svojstva.

LINEARNA KORELACIJA

1. Bravaisov korelacioni koeficijent za mnogo varijanata

Linearna korelacija je ona, kod koje se u korelacionoj tabeli varijante raspodjeljuju dijagonalno u obliku elipse.

Linearnu korelaciju izrazujemo pomoću B r a v a i s o v o g korelacionog koeficijenta tako, da zbroj produkata svake po-

jedine frekvencije i njezine udaljenosti od srednje vrijednosti **x** svojstva i srednje vrijednosti **y** svojstva, podijelimo s produktom broja svih varijanata i standardne devijacije **x** i **y** svojstva. Dakle općenita formula za Bravaisov korelacioni koeficijent glasi:

$$r = \frac{\Sigma p\, \alpha_x\, \alpha_y}{n\, \sigma_x\, \sigma_y}$$

Kad je korelacija između dva svojstva potpuna t. j. ako je $\alpha_x = \alpha_y$ i $\sigma_x = \sigma_y$, onda je $r = \frac{\Sigma p\alpha^2}{n\sigma^2} = 1$. U toj jednadžbi je $\frac{\Sigma p\alpha^2}{n} = \sigma^2$ (vidi str. 30).

Iz toga izlazi, da se vrijednost korelacionog koeficijenta kod pozitivne korelacije kreće između 0 i 1, a kod negativne između 0 i —1.

Kod računske se operacije ne služimo razmacima od srednje vrijednosti **M**, nego od aproksimativne srednje vrijednosti **A**, s kojom smo se već upoznali **(vidi str. 22)**. **S A_x označit ćemo** aproksimativnu srednju vrijednost svojstva **x**, a s A_y svojstva **y**.

Iz toga izvodimo slijedeću formulu, kojom se služimo kod izračunavanja B r a v a i s o v o g k o r e l a c i o n o g k o e f i c i j e n t a, a koja glasi:

$$r = \frac{\Sigma pa_x\, a_y - nb_x\, b_y}{n\, \rho_x\, \rho_y}$$

U toj je formuli:

p . . . . . . frekvencija

a . . . . . . areal

n . . . . . . ukupni broj varijanata

b . . . . . . $\frac{\Sigma pa}{n}$ (vidi str. 22)

$$\rho = \sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2}$$

Ova formula vrijedi samo za linearne korelacije t. j. kad su varijante poredane tako, kao što je prikazano u našoj korelacionoj tabeli br. XXXVII. ili na slici br. 18 a i b. Ako korelacija nije linearna nego na pr. parabolična t. j. kad su varijante poredane kao u tab. XLV., str. 121, onda je računanje korelacije veoma komplicirano. Za poljoprivrednu praksu posve

je dovoljno, da brojčano izrazimo jačinu linearne korelacije. Kako se to radi, vidjet ćemo na slijedećem primjeru:

a) **Pozitivna korelacija:**

U našem primjeru sa pšenicom želimo ustanoviti, da li je duljina klasa u međusobnoj povezanosti s brojem klasića na klasu ili nije. U tu svrhu poredamo varijante za suponovano (x) i relativno (y) svojstvo u korelacionu tabelu.

Iz podjele se varijanata u korelacionoj tabeli vidi, da broj klasića na klasu i duljina klasa stoje u pozitivnoj linearnoj korelaciji. Prema tome izračunat ćemo jačinu korelacije po Bravaisovoj formuli:

$$r = \frac{\Sigma pa_x\, a_y - nb_x\, b_y}{n\, \rho_x\, \rho_y}$$

U toj su nam formuli poznate već otprije slijedeće vrijednosti:

$b_x = -0{,}4475$; $b_y = -0{,}4775$; $n = 400$

$\rho_x = 2{,}934$; $\rho_y = 3{,}398$

Redovi u smjeru od A_x i A_y dijele korelacionu tabelu na četiri kvadranta. U ovim je redovima $\Sigma pa_x\, a_y = 0$, jer su a_x ili a_y ili i a_x i a_y jednaki **0**. Produkti $a_x\, a_y$ su u I. i IV. kvadrantu pozitivni, a u II. i III. negativni.

U našem slučaju je u IV. kvadrantu i to u najdonjem redu, gdje je frekvencija p = 2, produkt $p\, a_x\, a_y = 112$, jer je $a_x = 7$ i $a_y = 8$.

U kvadrantima množimo svaku frekvenciju (p) s produktom $a_x\, a_y$ kako slijedi:

I. kvadrant
(pozitivni produkti)

p	a_x	a_y	
18	1	1	18
11	1	2	22
5	1	3	15
2	1	4	8
1	1	5	5
14	2	1	28
18	2	2	72
9	2	3	54

IV. kvadrant
(pozitivni produkti)

p	a_x	a_y	
7	1	1	7
6	1	2	12
6	1	3	18
2	1	4	8
5	2	1	10
3	2	2	12
6	2	3	36
4	2	4	32

p	a_x	a_y	
5	2	4	40
3	2	5	30
6	3	1	18
5	3	2	30
12	3	3	108
9	3	4	108
4	3	5	60
2	3	6	36
1	4	1	4
1	4	2	8
7	4	3	84
6	4	4	96
8	4	5	160
3	4	6	72
2	4	7	56
2	5	3	30
3	5	4	60
5	5	5	125
4	5	6	120
2	5	7	70
1	6	4	24
2	6	5	60
2	6	6	72
3	6	7	126
2	6	8	96
1	7	6	42
1	7	7	49
1	7	8	56
	Ukupno		2062

p	a_x	a_y	
1	2	5	10
3	3	1	9
2	3	2	12
4	3	3	36
7	3	4	84
3	3	5	45
2	3	6	36
2	4	1	8
3	4	2	24
1	4	3	12
2	4	4	32
5	4	5	100
4	4	6	96
1	4	7	28
1	5	1	5
1	5	2	10
1	5	3	15
2	5	4	40
3	5	5	75
3	5	6	90
3	5	7	105
1	5	8	40
2	6	5	60
1	6	6	36
2	6	7	84
1	6	8	48
1	6	9	54
1	7	7	49
2	7	8	112
1	7	9	63
	Ukupno		1553

II. kvadrant
(negativni produkti)

p	a_x	a_y	
2	2	2	7
1	3	1	8
4	1	2	6
7	1	1	8
3	2	1	3
	Ukupno		— 32

III. kvadrant
(negativni produkti)

p	a_x	a_y	
5	1	1	5
3	1	2	6
3	2	1	6
1	2	2	4
1	3	1	3
	Ukupno		— 24

$$\Sigma p\, a_x a_y = (2062 + 1553) - (24 + 32) = 3559;$$

$$r = \frac{\Sigma p\, a_x a_y - n\, b_x b_y}{n\, \rho_x \rho_y} = \frac{3559 - (400 \cdot -0,4475 \cdot -0,4775)}{400 \cdot 2,934 \cdot 3,398} = 0,871$$

Prema tome je korelacioni koeficijent za duljinu klasa i broj klasića na klasu r = 0,871 a to znači, da su oba svojstva u vrlo jakoj međusobnoj vezi t. j. između njih postoji vrlo jaka pozitivna korelacija.

Iz korelacionog koeficijenta (r) možemo odrediti jačinu korelacije po R o e m e r O r p h a l o v o j tabeli: (Tab. XXXVIII.)

Tab. XXXVIII.

Korelacioni koeficijent: r	Korelacija
0,0 — 0 1	nema
0,1 — 0,25	jako slaba
0,25 — 0,4	slaba
0,4 — 0,5	srednja
0,5 — 0,75	jaka
0,75 — 0,9	vrla jaka
0,9 — 1	potpuna

Evo još jednog primjera iz živinogojstva za pozitivnu korelaciju:

U korelacionoj tabeli XXXIX. na str. 104 prikazana je varijacija za nosivost i debljinu niti vune kod solčavske ovce. Htjeli bismo znati, kakva je veza između nosivosti i debljine niti vune; važno je, da to znaju stočari, koji oplemenjuju ovce na kvalitetu vune.

Ova je svojstva istražio prof. dr. Ogrizek. U korelacionoj tabeli je x svojstvo nosivost niti u gramima, a y svojstvo debljina niti u mikronima.

Tab. XXXIX.

Nosivost niti u gr (x)	Debljina niti u μ (y) 23·25–26·35	26·35–29·45	29·45–32·55	32·55–35·65	35·65–38·75	38·75–41·85	41·85–44·95	44·95–48·05	p
5·5–10·5	1								1
10·5–15·5		1							1
15·5–20·5		6	9	24	1	3	4		47
20·5–25·5			1	30	21	3	1		56
25·5–30·5					43	10			53
30·5–35·5				4	1	9	5	1	19
35·5–40·5							8	7	10
40·5–45·5								7	7
p	1	7	10	58	66	25	18	15	200

Kako se iz korelacione tabele vidi, i ovdje je korelacija linearna, tako da možemo izračunati korelacioni koeficijent po Bravaisovoj formuli. Po toj formuli naći ćemo, da je r=0,779, a to znači, da je između debljine i nosivosti niti vrlo jaka pozitivna korelacija.

b) Negativna korelacija

Istraživali smo, u kakvoj je vezi stupanj caklavosti zrna pšenice s duljinom vremena potrebnog za meljavu. U tu smo svrhu proučili 360 različnih sorata pšenice.

U korelacionoj tabeli br. XL. prikazan je raspored istraženih varijanata-sorata. Iz te se tabele vidi, da i ovdje postoji linearna, ali negativna korelacija.

Korelacioni koeficijent izračunan po Bravaisovoj formuli je r = — 0,736 t. j. caklavost zrna i trajanje meljave u jakoj su negativnoj zavisnosti.

Tab. XL.

Trajanje meljave od 100 g zrna — u sekundama (")	Caklavost zrna u % 0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90	90–95	95–100		Prosječna caklavost u %
45–55																			1		1	92·5
55–65																		1	1	1	3	92·5
65–75																1	1	1			3	82·5
75–85													1	1	2	3	2	1			10	75·0
85–95											2	2	3	4	3	2	1				17	66·617
95–105									1	2	2	3	4	6	3	2	1				24	63·541
105–115									3	4	5	6	7	4	2	1	1				33	58·712
115–125							1	1	4	3	9	7	5	4	2	1					37	55·743
125–135					1		1	3	4	4	10	8	9	4	1		1				46	54·347
135–145					1	1	3	4	5	14	14	8	4	2	1						57	49·605
145–155					1	1	3	7	5	8	8	5	1	1							40	46·0
155–165				1	1	2	4	7	7	4	3	2	1	1							33	41·742
165–175					2	3	4	3	3	2	2	2	1	1							23	40·978
175–185				1	2	5	3	2	1		1	1									16	32·812
185–195				1	2	3	2	1													9	27·50
195–205	1		1	2	1	1															6	16·666
205–215		1	1																		2	10·0
	1	1	2	5	11	16	21	28	33	41	56	44	36	28	14	10	7	3	2	1	360	
Prosječno trajanje meljave — u sekundama (")	205"	215"	210"	191"	234"	180"	165"	158"	147"	142"	138'	135"	125"	120"	109"	97"	99"	75"	70"	65"		

2. Izračunavanje korelacionog koeficijenta za mali broj varijanata

Kad je broj varijanata, za koje treba izračunati korelacioni koeficijent, razmjerno malen, ne možemo se služiti korelacionom tabelom. U tom slučaju izračunavamo eventualnu ovisnost između dva svojstva pomoću ove formule za korelacioni koeficijent:

$$r = \frac{\Sigma V_x V_y - n M_x M_y}{n \sigma_x \sigma_y}$$

Primjenu ove formule prikazat ćemo na slijedećem primjeru:

U 12 različnih sorata soje istražili smo sadržinu sirovih bjelančevina (sirovi protein) i sirove masti u sjemenu. Slijedećom računskom operacijom nastojali smo pronaći, da li postoji neka zavisnost među spomenutim tvarima. (Tab. XLI.).

Sa **x** označit ćemo sirovu mast a sa **y** sirovi protein. Prema tome su V_x varijante sirove masti, a V_y varijante sirovog proteina. M_x je srednja vrijednost za sirovu mast, M_y za sirovi protein, **n** je ukupni broj varijanata, a σ_x i σ_y su odgovarajuće standardne devijacije.

Pojedine vrijednosti korelacionog koeficijenta izračunat ćemo iz podataka u Tab. XLI.

$$M_x = \frac{\Sigma V_x}{n} = \frac{224\cdot19}{12} = \mathbf{18\cdot6825}; \quad M_y = \frac{\Sigma V_y}{n} = \frac{457\cdot71}{12} = \mathbf{38\cdot1425};$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma V^2_x}{n} - M^2_x} = \sqrt{\frac{4225\cdot3891}{12} - 18\cdot6825} = \mathbf{1\cdot7546}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma V^2_y}{n} - M^2_y} = \sqrt{\frac{17518\cdot8063}{12} - 38\cdot1425} = \mathbf{2\cdot2472}$$

$$r = \frac{\Sigma V_x V_y - n M_x M_y}{n \sigma_x \sigma_y} = \frac{8511\cdot5882 - 12 \times 18\cdot6825 \times 38\cdot1425}{12 \times 1\cdot7546 \times 2\cdot2472} = -\,\mathbf{0\cdot8004}$$

Kako je r = —0,8004, znači, da su u našem slučaju količina sirove masti i sirovog proteina u sjemenu soje u vrlo jakoj negativnoj korelaciji.

Tab. XLI.

Tek. br. sorte	% Sirova mast V_x	% Sirovi protein V_y	$V_x \cdot V_y$	V^2_x	V^2_y
1	19,83	37,02	734,1066	393,2289	1370,4804
2	18,23	39,07	712,2461	332,3329	1526,4649
3	20,83	34,96	728,2168	433,8889	1222,2016
4	19,72	37,48	739,1056	388,8784	1404,7504
5	17,06	38,19	651,5214	291,0436	1458,4761
6	17,89	39,57	707,9073	321,0521	1565,7849
7	18,37	37,41	694,7037	344,8449	1399,5081
8	19,33	34,84	673,4572	373,6489	1213,8256
9	22,29	35,73	796,4217	496,8441	1276,6329
10	16,72	41,37	691,7064	279,5584	1711,4769
11	15,98	41,89	669,4022	255,3604	1754,7721
12	17,74	40,18	712,7932	314,7076	1614,4324
n = 12	$\Sigma V_x =$ 224,19	$\Sigma V_y =$ 457,71	$\Sigma V_x \cdot V_y =$ 8511,5882	$\Sigma V^2_x =$ 4225,3891	$\Sigma V^2_y =$ 1751,8063

3. Srednja i vjerojatna pogreška korelacionog koeficijenta

Da li je korelacioni koeficijent, izračunat na temelju neke korelacione tabele, varijaciono-statistički opravdan, najbolje nam pokazuje njegova srednja odnosno vjerojatna pogreška. Srednju pogrešku korelacionog koeficijenta izračunat ćemo po Pearson-Filonovoj formuli: $m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$, a vjerojatnu pogrešku po formuli $E.\ P._r = 0{,}6745 \cdot \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$, gdje je **n** broj varijanata, a **r** korelacioni koeficijent. Pokusima je ustanovljeno, da se iz korelacionog koeficijenta može zaključiti na korelaciju između svojstava samo onda, ako je on barem tri puta veći od svoje srednje odnosno vjerojatne pogreške.

Izračunali smo, da je korelacioni koeficijent za duljinu klasa i broj klasića r = 0,871. Prema tome je srednja po-

g r e š k a tog koeficijenta: $m_r = \frac{1 - 0,871^2}{\sqrt{400}} = 0,012$, a v j e r o-

j a t n a p o g r e š k a $E.P_r = 0,6745 \cdot \frac{1 - 0,871^2}{\sqrt{400}} = 0,0081$

Dakle: $r \pm m_r$ . . . $0,871 \pm 0,012$ i

$r \pm E.P_r$ . . . $0,871 \pm 0,0081$

Vidimo, da je trostruka s r e d n j a, odnosno v j e r o j a t n a pogreška manja od korelacionog koeficijenta, a to znači, da je korelacija duljine klasa i broja klasića varijaciono-statistički opravdana.

Ako je broj varijanata malen, srednja i vjerojatna pogreška korelacionog koeficijenta je točnija, ako se mjesto divizora $\sqrt{n}$ služimo $\sqrt{n-1}$

4. Regresija

Za određivanje intenziteta, kojim jedno svojstvo reagira na promjene nekog drugog svojstva, služi r e g r e s i j a t. j. korelacioni koeficijent (r) pomnožen kvocijentom standardne devijacije **X** i **Y** svojstva.

$$R_{x/y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ odnosno } R_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

U našem primjeru za pšenicu mogli bismo izračunati regresiju na ovaj način:

a) Da doznamo, koliko se produlji ili skrati klas (relativno ili **y** svojstvo), kad se broj klasića (suponovano ili **x** svojstvo) poveća ili smanji za jedinicu moramo upotrebiti formulu: $R_{y/x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,871 \cdot \frac{1,699}{2,934} = 0,504$ cm, jer je $\sigma_x = 2,934$, a $\sigma_y = 1,699$ (vidi str. 32).

Dakle, ako se broj klasića na klasu poveća ili smanji za 1, klas se produlji, odnosno skrati za 0,504 cm.

b) Da doznamo, za koliko se poveća ili smanji broj klasića na klasu (suponovano ili **x** svojstvo), ako se duljina klasa (relativno ili **y** svojstvo) promijeni za 1 cm, onda se služimo formulom:

$R_{x/y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,871 \cdot \frac{2,934}{1,699} = 1,503$, a to znači kad se broj klasića na klasu promijeni za 1,503, onda se duljina klasa mijenja za 1 cm.

5. Srednja i vjerojatna pogreška regresije

Srednju pogrešku regresije izračunamo po formuli:

$$m_R = m_r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \text{ ako je } R_{x/y} \text{ i}$$

po formuli:

$$m_R = m_r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \text{ ako je } R_{y/x}.$$

Vjerojatna pogreška regresije je $\mathbf{E.P._R} = 0,6745\ m_R$.

6. Korelacija između više svojstava — parcijalna korelacija

Proučili smo međusobnu ovisnost dvaju svojstava bez obzira na druga svojstva, s kojima ova dva svojstva koreliraju. Ima slučajeva, kad treba istražiti korelaciju dvaju svojstava eliminiravši utjecaj trećeg ili četvrtog i t. d. svojstva, koja su u međusobnoj vezi s prva dva svojstva. Na pr. biometrički smo istraživali d u l j i n u, š i r i n u i d e b l j i n u s j e m e n a g r a h a i po Bravaisovoj formuli izračunali korelacioni koeficijent za: a) duljinu i širinu, b) duljinu i debljinu i c) širinu i debljinu. Ovdje nam korelacioni koeficijent izrazuje stupanj korelacije između dva svojstva uz sudjelovanje i trećeg, dakle korelacioni koeficijent za duljinu i širinu označuje jačinu povezanosti tih dvaju svojstava uz sudjelovanje i trećeg svojstva t. j. debljine. Isto tako korelacioni koeficijent za duljinu i debljinu označuje međusobnu ovisnost tih dvaju svojstava uz sudjelovanje i širine, a korelacioni koeficijent za širinu i debljinu mjeri povezanost ovih dvaju svojstava uz sudjelovanje duljine.

Kad treba izračunati korelacioni koeficijent za dva svojstva eliminirajući pri tom treće svojstvo, služimo se parcijalnim korelacionim koeficijentima, a izračunavamo ih po ovim formulama:

$$\text{I. } r_{12/3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}};$$

$$\text{II.}\quad r_{13/2} = \frac{r_{13} - r_{12} \cdot r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}};$$

$$\text{III.}\quad r_{23/1} = \frac{r_{23} - r_{12} \cdot r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}$$

$r_{12/3}$ je parcijalni korelacioni koeficijent za svojstvo 1 i 2, kad je eliminiran utjecaj 3. svojstva;

$r_{13/2}$ znači korelacioni koeficijent za svojstva 1 i 3, ako je eliminiran utjecaj svojstva 2 i

$r_{23/1}$ je korelacioni koeficijent za svojstva 2 i 3 eliminiravši utjecaj svojstva 1,

r_{12} je korelacioni koeficijent izračunat po Bravaisovoj formuli

$$r = \frac{\Sigma\, pa_x \cdot a_y - nb_x\, b_y}{n\, \rho_x\, \rho_y}$$

kad i svojstvo 3 sudjeluje u razvoju svojstva 1 i 2, r_{13} je korelacioni koeficijent za svojstvo 1 i 3 uz sudjelovanje svojstva 2, a r_{23} je korelacioni koeficijent za svojstva 2 i 3, kad i svojstvo 1 utječe na razvoj svojstva 2 i 3.

Primjenu tih formula najbolje ćemo vidjeti na slijedećem primjeru s grahom:

Označimo s 1 duljinu, s 2 širinu i s 3 debljinu zrna graha. Ako po spomenutoj Bravaisovoj formuli izračunamo korelacione koeficijente za pojedine parove dimenzija, naći ćemo za njih slijedeće vrijednosti: $r_{12} = 0{,}733$; $r_{13} = 0{,}691$; $r_{23} = 0{,}628$.

Parcijalni korelacioni koeficijent između duljine (1) i širine (2), ako je debljina (3) sjemena konstantna, izračuna se po formuli I.:

$$r_{12/3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{0{,}733 - (0{,}691 \times 0{,}628)}{\sqrt{(1 - 0{,}691^2)(1 - 0{,}628^2)}} = \mathbf{0{,}531}$$

Iz toga slijedi, da je parcijalni korelacioni koeficijent za $r_{12/3}$ manji od Bravaisova r_{12}.

Po formuli II izračuna se parcijalni korelacioni koeficijent $r_{13/2} = 0{,}435$ za duljinu (1) i debljinu (3), a po formuli III parcijalni korelacioni koeficijent $r_{23/1} = 0{,}258$ za širinu (2) i debljinu (3).

Ako kod četiri svojstva u korelaciji želimo istražiti jačinu zavisnosti između jednog relativnog i jednog od triju suponovanih svojstava, uz pretpostavku, da su druga dva suponirana svojstva konstantna, onda izračunamo parcijalni korelacioni koeficijent po slijedećim formulama:

$$\text{I)}\quad r_{12/34} = \frac{r_{12/4} - r_{13/4} \cdot r_{23/4}}{\sqrt{(1 - r^2_{13/4})(1 - r^2_{23/4})}},$$

odnosno po formulama:

$$\text{II)}\quad r_{13/24} = \frac{r_{13/4} - r_{12/4} \cdot r_{23/4}}{\sqrt{(1 - r^2_{12/4})(1 - r^2_{23/4})}}$$

$$\text{III)}\quad r_{23/14} = \frac{r_{23/4} - r_{12/4} \cdot r_{13/4}}{\sqrt{(1 - r^2_{12/4})(1 - r^2_{13/4})}}$$

$$\text{IV)}\quad r_{24/13} = \frac{r_{24/3} - r_{12/3} \cdot r_{14/3}}{\sqrt{(1 - r^2_{12/3})(1 - r^2_{14/3})}}$$

$$\text{V)}\quad r_{34/12} = \frac{r_{34/2} - r_{13/2} \cdot r_{14/2}}{\sqrt{(1 - r^2_{13/2})(1 - r^2_{14/2})}}$$

$$\text{VI)}\quad r_{14/23} = \frac{r_{14/3} - r_{12/3} \cdot r_{24/3}}{\sqrt{(1 - r^2_{12/3})(1 - r^2_{24/3})}}$$

NELINEARNA KORELACIJA

Osim linearnih korelacija ima i različnih nelinearnih. Nelinearne korelacije pojavljuju se, kad u korelacionoj tabeli varijante nisu poredane ni u elipsi, ni u krugu nego u kojem drugom obliku.

Česta nelinearna korelacija kod poljoprivrednih biometričkih istraživanja je parabolična korelacija. Takva je korelacija na pr. između caklavosti zrna pšenice i konzistencije tijesta dobivenog iz prekrupe (Pelshenkeova metoda).

Konzistenciju tijesta ustanovljujemo na taj način, da 5 g prekrupe pšeničnog zrna zamijesimo s 0,25 g kvasca i 2,5 do 3 ccm vode od 32° C. Od toga tijesta načinimo kuglicu i ubacimo je u staklenu čašu, koja je do ¾ napunjena vodom temperature 31° do 33° C. Vrijeme, otkad kuglica u čaši ispliva na površinu vode, pa do časa, kada se raspane, uzima se kao mjerilo konzistencije tijesta. Što se dulje kuglica u vodi raspada, to je bolja i konzistencija.

U korelacionoj tabeli br. XLV. str. 121 prikazana je podjela 360 sorata pšenice istraženih na caklavost i konzistenciju tijesta. Iz te se tabele vidi, da su spomenuta svojstva od 0 pa do 75% caklavosti u pozitivnoj, a iznad 75% u negativnoj korelaciji. Korelacija ovdje nije linearna, pa stoga ne možemo upotrijebiti formulu za Bravaisov korelacioni koeficijent. Točniju sliku raspodjele varijanata i njihove korelacije možemo u ovom slučaju dobiti grafičkim prikazom.

7. Grafički prikaz korelacije

Radi bolje ocjene treba katkada korelaciju prikazati i grafički pomoću regresivnih linija. U tu svrhu treba najprije izračunati za relativno i suponovano svojstvo prosječne razredne vrijednosti, i to za svaki razred napose. Na temelju tih brojaka konstruiraju se faktične regresione linije. Teoretske regresione linije za linearne i parabolične korelacije izračunat ćemo najbolje pomoću metode najmanjih kvadrata uz uporabu Mikičevih formula i tabela i to za: (str. 113).

a) linearnu podjelu varijanata po formuli za pravac . . . . $y = a + bx$.

Tab. XLII.

Konstante u linearnoj jednadžbi za:					
α) parni broj razreda			β) neparni broj razreda		
n	k*	Σ (n)	n	k_1*	k_2
2	1	3	1	0	1
4	10	10	3	2	2
6	35	21	5	10	3
8	84	36	7	28	4
10	165	55	9	60	5
12	286	78	11	110	6
14	455	105	13	182	7
16	680	136	15	280	8
18	969	171	17	408	9
20	1330	210	19	570	10
22	1771	253	21	770	11
24	2300	300	23	1012	12

* Vrijede i za parabolu

α) parni broj razreda

$$b = \frac{1}{k}[2\,\Sigma(xy) - (n+1)\cdot\Sigma y]$$

$$a = \frac{1}{n}[\Sigma(y) - \Sigma(n)\,b]$$

β) neparni broj razreda

$$b = \frac{1}{k_1}[\Sigma(xy) - k_2\,\Sigma y]$$

$$a = \frac{1}{n}\cdot\Sigma y - k_2 b$$

b) Paraboličnu podjelu varijanata: $y = a + bx + cx^2$

$$c = \frac{1}{k_3}[\alpha\Sigma(y) - \beta\Sigma(xy) + \gamma\Sigma(x^2y)]$$

$$b = \frac{1}{k}[2\,\Sigma(xy) - (n+1)\cdot\Sigma(y)] - (n+1)\cdot c$$ - - - (parni broj varijanata)

$$b = \frac{1}{k_1}[\Sigma(xy) - k_2\,\Sigma y] - (n+1)\cdot c$$ ------ (neparni broj varijanata)

$$a = \frac{1}{n}[\Sigma(y) - \Sigma(n)\,b - \Sigma(n^2)\cdot c]$$

U ovim su formulama:

n . . . broj razreda; vrijednosti n, k, k_1, k_2, k_3 α, β i γ nađemo u tabelama XLII i XLIII.

a) Linearna korelacija

Primjer: U korelacionoj tabeli XXXVII. str. 98 prikazana je raspodjela varijanata za duljinu klasa i za broj klasića pšenice. Da ocijenimo jačinu povezanosti istraženih svojstava treba grafički prikazati korelaciju između spomenutih svojstava pomoću faktične i teoretske regresione linije. Brojčane podatke za konstruiranje eksperimentalne regresione linije dobijemo, ako za relativno i suponovano svojstvo najprije izračunamo prosječne razredne vrijednosti. Na pr. prosječan broj klasića u

Tab. XLIII. Konstante u jednadžbi za parabolu:

n	k_3	α	β	γ	$\Sigma(n)$	$\Sigma(n^2)$
3	2	10	12	3	6	14
4	4	5	5	1	10	30
5	14	7	6	1	15	55
6	112	28	21	3	21	91
7	84	12	8	1	28	140
8	168	15	9	1	36	204
9	924	55	30	3	45	285
10	528	22	11	1	55	385
11	858	26	12	1	66	506
12	4.004	91	39	3	78	650
13	2.002	35	14	1	91	819
14	2.912	40	15	1	105	1.015
15	12.376	36	48	3	120	1.240
16	5.712	51	17	1	136	1.496
17	7.752	57	18	1	153	1.785
18	31.008	190	57	3	171	2.109
19	13.566	70	20	1	190	2.470
20	17.556	77	21	1	210	2.870
21	67.298	253	66	3	231	3.311
22	28.336	92	23	1	253	3.795
23	35.420	100	24	1	176	4.324
24	131.560	325	75	3	300	4.900
25	53.820	117	26	1	325	5.525

razredu s duljinom klasa od 6.5 —7 cm izračunamo tako, da od 8 varijanata tog razreda potražimo prosječan broj klasića na klasu. Dakle:

Broj klasića	Broj varijanata u razredu	V · p
11	1	11
12	3	36
13	2	26
14	2	28
	$\Sigma p = 8$	$101 = \Sigma Vp$

Prema tome je prosječan broj klasića na klasu u razredu sa 6,5—7 cm duljine klasa i s 8 varijanata ovaj:

$$\frac{\Sigma v \cdot p}{\Sigma p} = \frac{101}{8} = 12{,}625$$

Na isti se način izračuna i prosječan broj klasića u svim ostalim razredima. Postupak kod izračunavanja prosječne duljine klasa u pojedinim razredima je dakako isti. Na pr. za razred s 12 klasića na klasu izračunamo prosječnu duljinu klasa na ovaj način:

Duljina klasa V u cm	Broj varijanata u razredu p	V · p
6 — 6,5	2	12,50
6,5 — 7	3	20,25
7 — 7,5	2	14,50
7,5 — 8	2	15,50
8 — 8,5	1	8,25
	$\Sigma p = 10$	$71{,}00 = \Sigma Vp$

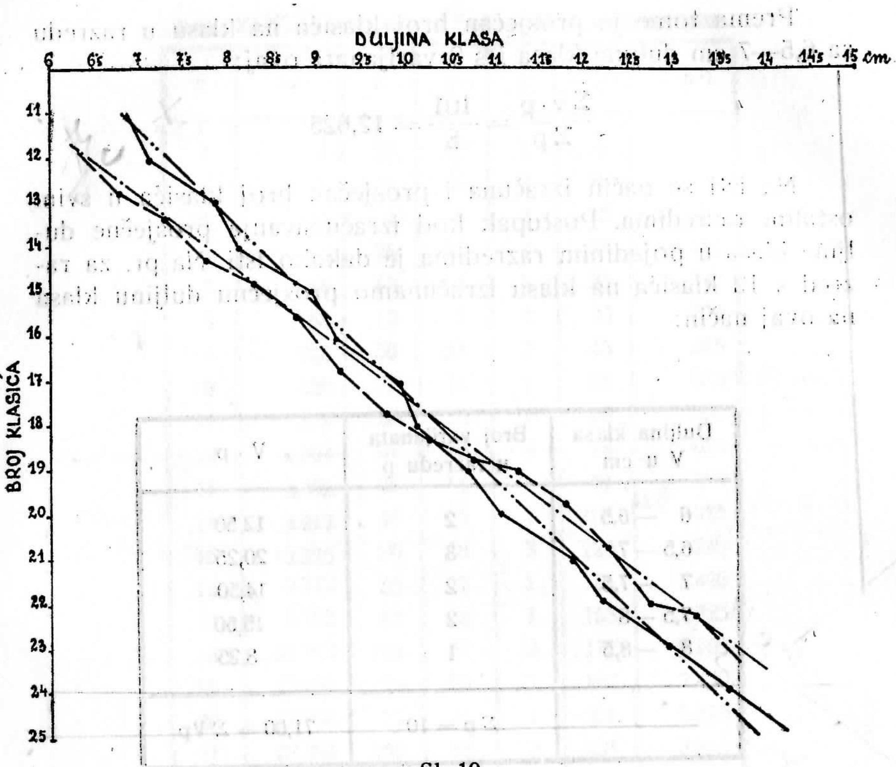
Prosječna je duljina klasa za razred s 12 klasića na klasu ova:

$$\frac{\Sigma V p}{\Sigma p} = \frac{71}{10} = 7{,}1$$

Eksperimentalne regresione linije nađemo tako, da na pr. za vrijednosti **x** uzmemo razmake od 1 cm, a onda na ordinate nanesemo prosječne razredne vrijednosti za **y** svojstvo i obrnuto t. j. ako na apscisi za **y** svojstvo nanesemo razmake na pr. od 1 cm, onda dolaze na ordinate prosječne razredne vrijednosti za **x** svojstvo. (Vidi sliku br. 19).

Budući da smo za duljinu klasa i broj klasića na klasu pronašli linearnu korelaciju, treba za računanje njihovih teoretskih regresionih linija upotrijebiti Mikičeve formule i tabele za linearnu jednadžbu (vidi str. 112, tab. XLII.).

*



Sl. 19.

Regresionu liniju za duljinu klasa izračunamo ovako:

Duljina klasa uvrštena je u 18 razreda, dakle moramo se poslužiti Mikičevom formulom i tabelom za parni broj varijanata — razreda t. j.

$$b = \frac{1}{k} [2\,\Sigma\,(x\,y) - (n + 1)\,\Sigma\,(y)]$$

U ovu formulu uvrstimo podatke iz naše tabele na str. 112 i str. 117 za 18 varijanata-razreda:

$$b = \frac{1}{969} [2 \cdot (3.493{,}74) - (18 + 1) \cdot 328{,}96] = \mathbf{0{,}7608}$$

$$a = \frac{1}{n} [\Sigma\,(y) - \Sigma\,(n) \cdot b] = \frac{1}{18} [328{,}96 - 171 \cdot 0{,}7608] = 11{,}048$$

Iz **a** i **b** izračuna se **y** t. j. ordinate za odgovarajuće **x**. Kako je kod nas regresiona linija pravac, to treba pronaći samo dvije točke na ordinati i to na pr. za **x** = 1 i **x** = 18.

Formula za linearnu jednadžbu glasi: y = a + bx.

Ako je **x** = 1, onda je

y = 11,048 + 0,7608 · 1 = 11,8088.

Za x = 18 je

y = 11,048 + 0,7608 · 18 = 24,7424.

Iz ovih podataka konstruiramo teoretsku regresionu liniju (vidi sl. 19).

Tab. XLIV.

Klasovi pšenice

Razredi za duljinu klasa	Prosječni broj klasića na klasu y	Broj razreda	x · y	Teoretski y
6 — 6,5	11,67	1	11,67	11,8088
6,5 — 7	12,62	2	25,24	
7 — 7,5	13,25	3	39,75	
7,5 — 8	14,17	4	56,68	
8 — 8,5	14,88	5	74,40	
8,5 — 9	15,51	6	93,06	
9 — 9,5	16,72	7	117,04	
9,5 — 10	17,63	8	136,24	
10 — 10,5	18,20	9	163,80	
10,5 — 11	18,86	10	188,60	
11 — 11,5	19,03	11	209,33	
11,5 — 12	19,16	12	237,12	
12 — 12,5	20,72	13	269,36	
12,5 — 13	22,07	14	308,98	
13 — 13,5	22,30	15	334,50	
13,5 — 14	23,42	16	374,72	
14 — 14,5	24,25	17	412,25	
14,5 — 15	24,50	18	441,00	24,7424
	Σy = 328,96		Σ(xy) = 3493,74	

y = a + bx; **a** = 11,048; **b** = 0,7608.

Na slici br. 19 vidimo teoretsku regresionu liniju i liniju dobivenu kod eksperimenata za duljinu klasa.

Brojčani podaci za regresionu liniju za broj klasića nalaze se u tabeli XLIVa., str. 119. Oni se izračunaju na isti način kao i za duljinu klasa samo s tom razlikom, da se ovdje služimo M i k i č e v o m formulom za podatke o neparnom broju razreda (str. 112, tab. XLII.), jer je ovdje samo 15 razreda. Za naš primjer je:

$$b = \frac{1}{k_1}[\Sigma (xy) - k_2\, \Sigma y] = \frac{1}{280}[1378{,}24 - 8 \times 153{,}99] = 0{,}5225$$

$$a = \frac{1}{n}\, \Sigma y - k_2\, b = \frac{1}{15} \times 153{,}99 - 8 \times 0{,}5225 = 6{,}086$$

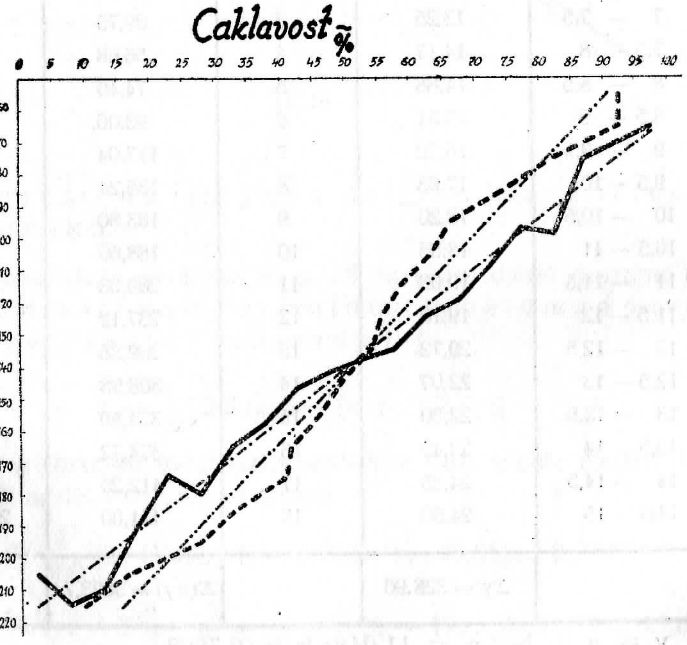
Po formuli: $y = a + bx$ izračunamo y za $x = 1$

$y = 6{,}086 + 0{,}5225 \cdot 1 = 6{,}6085.$

Za $x = 15$ je

$y = 6{,}086 + 0{,}5225 \cdot 15 = 13{,}9235.$

Na apscisi za $x = 1$ nanesemo ordinatu $y = 6{,}6085$, a za $x = 15$ ordinata je $y = 13{,}9235$. Ako ove dvije točke na ordi-



Sl. 20.

Tab. XLIV a.

Razredi za broj klasića na klasu	Prosječna duljina klasa y	Broj razreda x	x·y	Teoretski y
11	6,75	1	6,75	6,6085
12	7,10	2	14,20	
13	7,71	3	23,13	
14	8,10	4	32,40	
15	8,79	5	43,95	
16	9,36	6	56,16	
17	9,78	7	68,46	
18	10.13	8	81,04	
19	10,69	9	96,21	
20	11,02	10	110,20	
21	11,71	11	128,81	
22	12,22	12	146,64	
23	12,78	13	166,14	
24	13,60	14	190,40	
25	14,25	15	213,75	13,9235
	$\Sigma y = 153{,}99$		$\Sigma (xy) = 1378{,}24$	

nati spojimo pravcem, dobijemo regresionu liniju (vidi sliku broj 19).

Na sl. br. 19 prikazana je teoretska regresiona linija i regresiona linija konstruirana iz eksperimentalnih data.

Između caklavosti zrna pšenice i trajanja meljave postoji negativna linearna korelacija (Tab. XL. str. 105). Kod grafičkog prikaza te korelacije (slika 20) služimo se isto tako Mikičevim tabelama i formulama za linearnu jednadžbu. U tom se slučaju regresione linije protežu u drugom smjeru, nego kod pozitivne linearne korelacije.

b) Parabolična korelacija

U korelacionoj tabeli XLV., str. 121 prikazana je nelinearna korelacija za caklavost zrna i konzistenciju tijesta. Sudeći po razdiobi varijanata u toj tabeli, korelacija je ovdje približno parabolična. Treba grafički prikazati, do koje se mjere eksperimentalni podaci podudaraju s pretpostavkom o paraboličnoj korelaciji pa prema tomu i o paraboličnoj regresionoj liniji. U tu svrhu treba pronaći najprije faktičnu, a onda teoretsku regresionu liniju.

Podatke za faktičnu regresionu liniju dobivamo iz prosječnih razrednih vrijednosti za suponovano i za relativno svojstvo. Prosječne razredne vrijednosti izračunamo i ovdje na isti način kao i za linearnu korelaciju.

U tab. XLV. na str. 121 sakupljeni su brojčani podaci za prosječne razredne vrijednosti suponovanog svojstva (**x**... konsistenciju tijesta) i relativnog svojstva (**y**... caklavost zrna).

Teoretsku regresionu liniju za suponovano i relativno svojstvo konstruiramo iz ordinata dobivenih po jednadžbi za parabolu, koja glasi:

$$y = a + bx + cx^2$$

Vrijednosti **a**, **b** i **c** računamo po Mikičevim formulama i tabelama (vidi str. 112 i 113) za parabolu i to za parni broj podataka, jer smo caklavost i konstituciju uvrstili u 20 razreda.

Za caklavost računamo vrijednosti **a**, **b** i **c** iz podataka u tab. XLIII. i XLV. na str. 114 i 121 za 20 razreda i iz tab. XLVI. na str. 123.

Po tome je:

$$c = \frac{1}{17{,}556}\,[77 \times 940{,}6 - 21 \times 11285{,}4 + 1 \times 154.681{,}6] = -\,\mathbf{0{,}56308}$$

$$b = \frac{1}{1330}\,[2 \times 11285{,}4 - 21 \times 940{,}6] - 21 \times (-\,0{,}56308) = \mathbf{13{\cdot}94362}$$

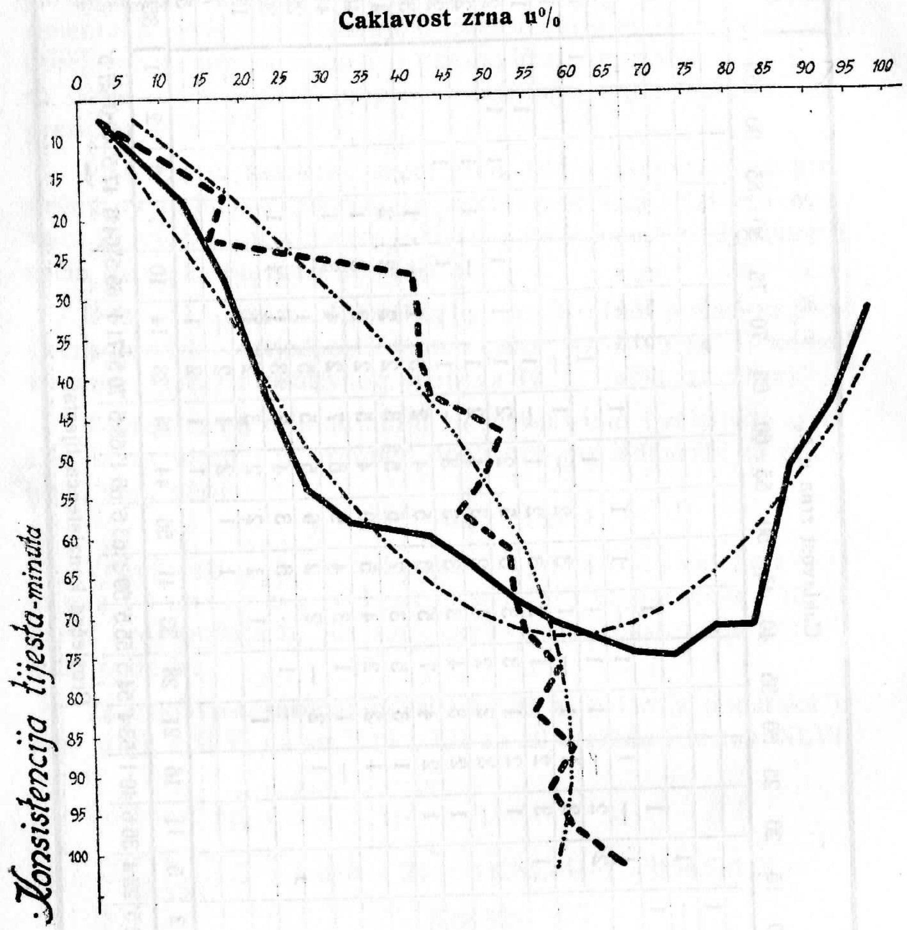
$$a = \frac{1}{20}\,[940{,}6 - 210 \times 13{\cdot}94362 - 2870 \times (-\,0{,}56308)] = -\,\mathbf{18\,576}$$

Tab. XLV.

Konzistenca tijesta u minutama	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90	90–95	95–100	n	Prosječna caklavost u %
	Caklavost zrna u %																					
0′—5′	1																				1	2·5
5′—10′		1	1																		2	10·0
10′—15′			—	1																	1	17·5
15′—20′			1	—	1				1												3	15.833
20′—25′				1	—	1		1	—	1	1		1								6	40.833
25′—30′				2	2	—	1	1	1	—	—	1	—	1						1	10	41·5
30′—35′				—	2	1	1	—	1	3	2	—	1	—							11	41·545
35′—40′				1	3	2	—	1	2	3	2	1	—	1					1		17	42·794
40′—45′					1	2	1	3	3	3	3	2	2	1	1	1		1	1		25	51·5
45′—50′					—	3	2	2	4	2	3	4	2	1	—	—	1	1			25	49·5
50′—55′					1	2	3	4	3	3	3	3	—	1	—	1	—	1			25	46·3
55′—60′					1	2	4	7	5	3	5	4	2	3	1	—	1				38	47·368
60′—65′						1	3	5	3	7	6	5	3	2	2	2	2				41	52·743
65′—70′						1	2	2	4	5	10	4	5	2	2	2	1				40	54·012
70′—75′						—	1	1	3	4	9	6	7	2	4	3	1				41	58·109
75′—80′						1	2	—	2	2	6	5	5	5	1	—	—				29	55·086
80′—85′							—	1	—	3	3	4	3	3	1	1	1				20	59·5
85′—90′							1		1	1	2	2	3	2	1						13	56·73
90′—95′										1	1	2	1	2	—						7	58·928
95′—100′												1	1	2	1						5	65·5
n	1	1	2	5	11	16	21	28	33	41	56	44	36	28	14	10	7	3	2	1	360	
Prosječna konzistenca tijesta	2·5′	7·5′	12·5′	22·4′	36·6′	49·1′	53·4′	54·5′	55·5′	59·3′	63·6′	66·4′	68·6′	70·5′	71·1′	65·5′	64·6′	47·5′	40·0′	27·5′		

Iz a, **b i c** izračunamo ordinatne točke **y** za pojedine vrijednosti od x = 1 do x = 20 po formuli za parabolu $y = a + bx + cx^2$. (Vidi kolonu 6 str. 123).

Ako te točke na ordinatama spojimo, nastaje parabolična regresiona linija (slika 21).



Sl. 21.

Usporedimo li ovu teoretsku liniju s regresionom linijom dobivenom iz eksperimentalnih podataka (ordinate za prosječne razredne vrijednosti), naći ćemo, da se ove donekle podudaraju.

Na isti način izračunat ćemo i ordinate za regresionu liniju za konzistencu tijesta. U tu svrhu nam služi tabela XLVII na

Tab. XLVI.

1 Caklavost u %	2 Prosječna konzistenca tijesta u minutama	3 Broj razreda x	4 x·y	5 x²·y	6 Teoretski (y) minute
0 — 5	2,5	1	2,5	2,5	— 5·2
5 — 10	7,5	2	15,0	30,0	6·1
10 — 15	12,5	3	37,5	112,5	18·2
15 — 20	24,4	4	97,6	390.4	28·2
20 — 25	36,6	5	183,0	915,0	37·1
25 — 30	49,1	6	294,6	1767,6	44·8
30 — 35	53,4	7	373,8	2616,6	51·4
35 — 40	54,5	8	436,0	3488,0	56·9
40 — 45	55,5	9	499,5	4495,5	61·3
45 — 50	59,3	10	593.0	5930,0	64·6
50 — 55	63,6	11	699,6	7695,6	66·7
55 — 60	66,4	12	796,8	9561,6	67·7
60 — 65	68,6	13	891,8	115934,5	67·5
65 — 70	70,5	14	987,0	13818,0	66·3
70 — 75	71,1	15	1066,5	15997,5	63·9
75 — 80	65,5	16	1048,0	16768,0	60·4
80 — 85	64,6	17	1098,2	18669,4	55·7
85 — 90	47,5	18	855,0	15390,0	49·9
90 — 95	40,0	19	760,0	14440,0	43·1
95 — 100	27,5	20	550,0	11000,0	35·1
	940,6 = = Σ (y)	210 = = Σ (x)	11285,4 = = Σ (xy)	154681,6 = = Σ (x²y)	

str. 124. Pokusom dobivene ordinate sadržava kolona 2, a teoretske pak kolona 6.

Spojimo li (slika 21) ordinatne točke iz kolone 2, nastaje eksperimentalna regresiona linija. Do koje se mjere ona podudara s teoretskom, vidimo, ako točke na ordinatama iz kolone 6 spojimo linijom.

U našem slučaju je bila opravdana pretpostavka, da su konzistenca tijesta i caklavost zrna u paraboličnoj korelaciji.

Tab. XLVII.

1	2	3	4	5	6
Konzistenca tijesta u minutama (′)	Prosječna caklavost u % y	Broj razreda x	x · y	x^2y	Teoretske ordinate
0′ — 5′	2·500	1	2·500	2·500	6·39831
5′ — 10′	10·000	2	20·000	40·000	12·64719
10′ — 15′	17·500	3	52·500	157·000	18·50345
15′ — 20′	15·833	4	63·332	253·328	23·96739
20′ — 25′	40·833	5	244·165	1020·825	29·03871
25′ — 30′	41·500	6	249·000	1494·000	33·71751
30′ — 35′	41·545	7	290·815	2035·705	38·00379
35′ — 40′	42·794	8	342·352	2738 816	41·89755
40′ — 45′	51·500	9	463·500	4171·500	45·39879
45′ — 50′	49·500	10	495·000	4950·000	48·50750
50′ — 55′	46·300	11	509·300	5602·300	51·22371
55′ — 60′	47·368	12	568·416	6820·992	53·54739
60′ — 65′	52·743	13	685·659	8913·567	55·47855
65′ — 70′	54·012	14	756·168	10586·352	57·01719
70′ — 75′	58·109	15	871·635	13074·525	58·16331
75′ — 80′	55·086	16	881·376	14102·016	58·91691
80′ — 85′	59·500	17	1011·500	17195·500	59·27799
85′ — 90′	56·730	18	1021·140	18380·530	59·24655
90′ — 95′	58·928	19	1119·632	21274·008	58 82259
95′ — 100′	65·500	20	1310·000	26200·000	58·0061
	Σ y = = 867·781	Σ x = = 210	Σ (x·y) = = 10917·99	Σ (x^2y) = = 159012·954	

$$y = a + b x + c x^2$$

$$c = \frac{1}{k_2} [\alpha (\Sigma y) - \beta \Sigma (x y) + \gamma \cdot \Sigma (x^2 y)] =$$

$$= \frac{1}{17.556} [77 + 867{\cdot}781 - 21 \times 10917{\cdot}99 + 1 \times 159.012{,}954] =$$

$$= \mathbf{- 0{\cdot}19626}$$

$$b = \frac{1}{k} [2 \Sigma (x y) - (n + 1) \Sigma y] - (n + 1) c =$$

$$= \frac{1}{1330} [2 \times 10.917{\cdot}99 - (20 + 1) \times 867{\cdot}781] - (20 + 1) \times$$

$$\times - 0{\cdot}19626 = \mathbf{6{\cdot}83766}$$

$$a = \frac{1}{n} [\Sigma (y) - \Sigma (n) \cdot b - \Sigma (n^2) c] =$$

$$= \frac{1}{20} [867{\cdot}781 - 210 \times 6{\cdot}83766 - 2870 \times - 0{\cdot}19626] = \mathbf{- 0{\cdot}24306}$$

C. BIOMETRIČKA ISTRAŽIVANJA KVALITATIVNIH ILI ALTERNATIVNIH SVOJSTAVA

C—1. BIOMETRIKA VARIJACIJE

Općenito

Do sada smo proučavali varijaciju svojstava c i j e l i h (diskretnih) i r a z r e d n i h k v a n t i t a t i v n i h v a r i j a n a t a. U varijacionom redu takvih svojstava razlike su izražene kao kvantitete.

U eksperimentalnoj poljoprivredi imamo vrlo često posla i s k v a l i t a t i v n i m s v o j s t v i m a. Stoga je potrebno, da i ova svojstva varijaciono-statistički obradimo, kako bismo iz izračunatih vrijednosti stvorili pravilne zaključke.

K v a l i t a t i v n a s v o j s t v a imaju a l t e r n a t i v n u v a r i j a c i j u. Na pr. jednospolni su organizmi ili ženski ili muški.

Naročito mnogo kvalitativnih varijacija pojavljuje se u potomstvu križanaca. Na pr. u drugoj filijalnoj generaciji kod križanja homocigotnog (samooplodnja) graška žutog sjemena s homocigotnim graškom zelenog sjemena, razviju se u F_2 generaciji biljke sa žutim i s zelenim sjemenom. Dakle imademo dvije alternative.

Križanjem pšenice-golice žutih pljevica s pšenicom brkuljom smeđih pljevica izrasle su u F_2 generaciji biljke u četiri tipa i to: a) smeđa golica, b) žuta golica, c) smeđa osata i d) žuta osata pšenica — dakle četiri alternative.

Isto je tako i kod životinja:

Na pr. u F_2 generaciji križanjem homocigotnih bijelih Leghorn kokoši golih nogu s drugima crne boje i obraslih nogu razviju se životinje:

a) bijele boje, obraslih nogu, b) bijele boje, golih nogu, c) crne boje obraslih nogu i d) crne boje, golih nogu. I ovdje su četiri alternative.

Nadalje nalazimo alternativna svojstva kod di- i polimorfizma, kao i u svim onim slučajevima, gdje treba u populaciji ustanoviti omjer pojedinih kvalitativnih svojstava, koja sačinjavaju smjesu.

Prema tome imamo kod alternativnih svojstava dvije ili više alternativa.

I alternativna svojstva dadu se i treba da budu varijaciono-statistički obrađena.

Primjenu varijacione statistike na kvalitativna svojstva prikazat ću na nekoliko primjera iz svojih genetskih istraživanja.

Iz genetike (nauke o nasljeđivanju) poznato je, da su geni t. j. osnove za razvitak izvjesnog svojstva, lokalizirani na hromosomima, te da se sa spolnim stanicama prenose od roditelja na potomstvo.

Koliko ima izvjesna odlika (varijetet) organizma različitih hromosoma u spolnim stanicama (haploidni broj hromosoma), toliko će biti i skupina gena, koji se križanjem organizma neovisno kombiniraju s genima drugog organizma iste odlike.

Na pr. dominantan se gen **Ž** za žutu boju sjemena graška nalazi na jednom hromosomu, a dominantan gen **O** za okrugli oblik sjemena na nekom drugom hromosomu u spolnoj stanici roditelja žutog i okruglog sjemena. Genetska je konstitucija takvog homocigotnog roditelja **ŽŽOO**. Ako ga križamo s roditeljem genetske konstitucije **žžoo** t. j. s recesivnim svojstvima sjemena zelene boje i naboranog oblika, bit će F_1 gen. genetske konstitucije **ŽžOo.** U ovoj se generaciji stvaraju 4 različite gamete i to **ŽO, Žo, žO** i **žo** u omjeru 1 : 1 : 1 : 1.

U F_2 generaciji izrast će četiri fenotipa i to konstitucije **ŽO, Žo, žO** i **žo** u omjeru 9 : 3 : 3 : 1.

Jednaki se fenotipovi i u istom omjeru kao gore stvaraju u F_2 generaciji, kad križamo homocigotne roditelje žutog i naboranog sjemena, dakle genetske konstitucije **ŽŽoo**, s roditeljima zelenog i okruglog sjemena t. j. **žžOO.** U tom je slučaju u svakog roditelja po jedno dominantno i jedno recesivno svojstvo. Dakle je svejedno, da li povratno križamo F_1 generaciju, nastalu križanjem roditelja genetske konstitucije **ŽŽOO . žžoo** ili križanjem roditelja genetske konstitucije **ŽŽoo . žžOO**, F_1 generacija konstitucije **ŽžOo** stvara gamete **ŽO, Žo, žO** i **žo** u omjeru 1 : 1 : 1 : 1.

Za svojstva, kojih se geni nalaze u istom hromosomu, gore spomenuti omjeri ne vrijede.

Ako križamo homocigotnog roditelja, kod kojega su oba dominantna gena lokalizirana u istom hromosomu (**AB/AB**), s drugim roditeljem, u kojega se oba recesivna gena nalaze zajedno u homolognom hromosomu (**ab/ab**), onda je F_1 generacija konstitucije **AB/ab.**

Ona stvara gamete **AB, Ab, aB** i **ab** u omjeru **n : 1 : 1 : n** i to tako, da je $n > 1$. Ovakvo križanje spada u s e r i j u s p a j a n j a (coupling serie).

F_1 generacija **Ab/aB**, koja se razvila od križanja roditelja, u kojima je po jedno dominantno i po jedno recesivno svojstvo, dakle **Ab . Ab** × **aB . aB**, stvara gamete **AB, Ab, aB** i **ab** u omjeru 1 : n : n : 1.

Takva križanja zovemo razdvajanjem, a skupinu, u koju spada ovo križanje, zovemo s e r i j o m r a z d v a j a n j a (repulsion serie).

Poradi razlike u omjeru različitih gameta dakako da su i omjeri fenotipova u F_2 generaciji u s e r i j i s p a j a n j a drugačiji od omjera u s e r i j i r a z d v a j a n j a.

Ima više metoda za varijaciono-statističko proučavanje podataka o svojstvima organizma u različitim generacijama nakon križanja i to:

A) uspoređivanje eksperimentalnih i teoretskih brojaka i mjerenje razlike pomoću srednjih odnosno vjerojatnih pogrešaka i to 1. za relativne i 2. za apsolutne brojke,

B) izračunavanje, da li su razlike između eksperimentalno dobivenih i teoretskih brojaka u granicama vjerojatnosti **P** (metoda x^2).

ad A) Primjenu metode A—1 i A—2 prikazat ćemo na slijedećem primjeru:

Jari rijetko-klasi šesteroredni ječam golog zrna križali smo s ozimim dvorednim ječmom obuvenog zrna da u F_2 i daljnim generacijama dobijemo po koju biljku ozimog dvorednog ječma golog zrna.

U F_2 generaciji izraslo je u konkretnom slučaju 1020 biljaka ovih svojstava:

a) dvoredac obuvenog zrna 583
b) dvoredac golog zrna 197
c) rijetkoklasi šesteroredac obuvenog zrna . 184
d) rijetkoklasi šesteroredac golog zrna . . . 56

1020

I. DVIJE ALTERNATIVE

Treba da istražimo, kako se nasljeđuje broj redova na klasu i u kojem su odnosu obuvena i gola zrna, i kako ta svojstva variraju.

Najprije nam valja ustanoviti broj biljaka s jednim svojstvom prema broju biljaka s drugim svojstvima.

Kod alternativnih svojstava izaberemo jednu alternativu — svejedno koju — kao mjernu jedinicu. Omjer pojedinih alternativa izražavamo ili u postocima ili u dijelovima jedinice.

Treba izračunati najprije omjer pojedinih alternativa, dakle srednje vrijednosti **M**, a onda varijabilitet pojedinih svojstava t. j. standardnu devijaciju σ kao temelj srednje pogreške.

Zanima nas najprije, kako se nasljeđuje broj redova na klasu ječma. Za ova svojstva postoje dvije alternative i to: a) biljke sa dvorednim i b) biljke sa rijetkoklasim šesterorednim klasovima. Jednu alternativu uzmemo kao mjernu jedinicu. Prema tome ima druga alternativa u donjem varijacionom redu vrijednost ništice. Onda je varijacioni red ovakav:

Razred	dvoredac 0	šesteroredac 1	Ukupno biljaka
Broj biljaka	780 p_0	240 p_1	1020 $p_0 + p_1 = n$

1. Srednja vrijednost

Iz toga izračunamo najprije srednju vrijednost (**M**), a onda pomoću standardne devijacije (σ) još i srednju pogrešku (**m**) srednje vrijednosti.

Srednju vrijednost kvantitativnih svojstava izračunamo po spomenutoj već formuli. $M = A + B;\ b = \frac{\Sigma pa}{n}$ Iz toga proizlazi, da je $M = \frac{p_1}{n}$ formula za srednju vrijednost kvalitativnih svojstava.

U našem je slučaju: $M = \frac{240}{1020} = 0{,}2353$, a to znači, da ima 0,2353 ili 23,53% biljaka rijetkoklasnog šesteroreca.

Uzmemo li za mjernu jedinicu razred sa biljkama dvorednih klasova, onda je vrijednost druge alternative ravna ništici i $M = \frac{780}{1020} = 0.7647$ ili 76.47% biljaka s dvorednim klasovima.

Budući da je kod križanja tip biljaka dvorednog klasa dominantan nad tipom biljaka rijetkoklasnog šesteroreca, razvijaju se u F_2 generaciji dvoreci i rijetkoklasni šesteroreci u teoretskom omjeru 3 : 1.

Kombinacioni je broj: $K = 3 + 1 = 4$.

Zanima nas, da li je u našem pokusu dobiveni omjer biometrički opravdan ili nije.

Ima dva načina da to utvrdimo, i to tako da:

α) kompariramo teoretske relativne brojke s relativnim brojkama, koje smo izračunali iz podataka dobivenih u pokusu, ili

β) kompariramo teoretske apsolutne brojke s brojkama iz pokusa.

ad α) Relativne brojke eksperimenta izračunavamo tako, da apsolutne brojke, koje smo dobili pokusom, pomnožimo sa $\frac{K}{n}$, gdje je **n** apsolutni broj svih varijanata u pokusu, a **K** kombinacioni broj izveden iz formule $(1 + 2 + 1)^n$, odnosno $(3 + 1)^n$ za omjer fenotipova u F_2 generaciji, ako je **n** broj heterocigotnih genetskih parova t. j.

$K = 4^n$, dakle $3{:}1 = (3+1)^1 = 4;\ 9{:}3{:}3{:}1 = (3+1)^2 = 16;$
$27 : 9 : 9 : 9 : 3 : 3 : 3 : 1 = (3 + 1)^3 = 64$ i t. d.

ad β) Teoretske apsolutne brojke izračunat ćemo tako, da teoretske relativne brojke na pr. 3 : 1 pomnožimo sa $\frac{n}{K}$

ad α) Apsolutne brojke fenotipova naše F_2 generacije najbolje odgovaraju omjeru 3 : 1 t. j. kombinacionom broju K=4.

*

Prema tome su relativne brojke fenotipova našeg eksperimenta ove:

$$780 \times \frac{4}{1020} = \frac{3120}{1020} = 3{,}059 \text{ biljaka sa dvorednim klasom,}$$

$$240 \times \frac{4}{1020} = \frac{960}{1020} = 0{,}941 \text{ sa šesterorednim klasom}$$

3,059 odgovara teoretskoj relaciji 3, a
0,941 teoretskoj relaciji 1.

ad *β*) Teoretske apsolutne brojke su slijedeće:

$$3 \times \frac{1020}{4} = \frac{3060}{4} = 765 \text{ biljaka dvorednog klasa,}$$

$$1 \times \frac{1020}{4} = 255 \text{ biljaka šesterorednog klasa.}$$

780 odgovara teoretskom broju 765
240 odgovara teoretskom broju 255.

2. Standardna devijacija

Želimo li izračunati srednju pogrešku srednjih vrijednosti za relativne odnosno apsolutne brojke, valja nam najprije izračunati standardnu devijaciju σ.

Standardnu devijaciju za kvantitativna svojstva naći ćemo po formuli:

$$\sigma = \pm a \sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2}$$

Kod kvalitativnih svojstava je razredni areal: a = 1. Već smo prije spomenuli, da je kod kvalitativnih svojstava $b = \frac{p_1}{n}$.

Iz toga slijedi, da je $b^2 = \frac{p_1^2}{n^2}$, tako da je onda:

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_1}{n} - \frac{p_1^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{p_0 p_1}}{n}$$

jer je $p_0 + p_1 = n$.

U našem je slučaju $\sigma = \frac{\sqrt{780 \times 240}}{1020} = \mathbf{0{,}42417}$

Dakle:

$M_1 = 3{,}059$ . . . dvoredac
$M_2 = 0{,}941$ . . . šesteroredac
$\sigma = 0{,}4241$ . . . dvoreca ili šesteroreca.

Standardnom devijacijom mjerimo varijabilitet svojstva i kod kvalitativnih svojstava. Najveći je varijabilitet onda, kad je kod dviju alternativa $\sigma = \pm 0{,}5$. Dakle kreće se od 0 — 0,5.

Srednje vrijednosti izražavamo u postocima, a isto tako i standardnu devijaciju. Formule za izračunavanje standardne devijacije u postocima su ove:

$$\sigma = \frac{100\sqrt{p_0 p_1}}{n}, \text{ odnosno } \sigma = \sqrt{\frac{100\, p_0}{n} \times \frac{100\, p_1}{n}},$$

$$\text{ili } \sigma = \sqrt{\%\, p_0 \times \%\, p_1}$$

U našem slučaju:

$$\sigma = \sqrt{76{,}47 \times 25{,}53} = \mathbf{44{,}183\%}$$

Prema tome:

$M_1 = 76{,}47\%$ dvoreca
$M_2 = 25{,}53\%$ šesteroreca
$\sigma = 44{,}18\%$ dvoreca ili šesteroreca.

Kod dviju je alternativa standardna devijacija u granicama od 0 — 50%. Ovdje se varijacioni koeficijent ne upotrebljava kao relativno mjerilo, jer je već standardna devijacija relativna vrijednost.

3. Srednja pogreška srednje vrijednosti

Na temelju srednje pogreške srednje vrijednosti kvantitativnih varijanata izvedene su formule za srednje pogreške kvalitativnih ili alternativnih svojstava.

$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ je općenita formula za srednju pogrešku srednje vrijednosti. Srednja pogreška srednjih vrijednosti M = 0.7647 dvoreca odnosno M = 0,2553 šesteroreca izračunamo po formuli:

$$\alpha)\ m = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{p_0 p_1}{n}} = \frac{1}{1020}\sqrt{\frac{780 \times 240}{1020}} = \mathbf{0{,}0132}$$

za dvorece odnosno šesterorece.

Kako je trostruka srednja pogreška manja od naših srednjih vrijednosti $M_1 = 76,47$, odnosno $M_2 = 25,53$, te su vrijednosti varijaciono-statistički opravdane.

β) Ako srednje vrijednosti i standardnu devijaciju izrazimo u postocima, onda treba izraziti u postocima i srednju pogrešku. Formula tada glasi:

$$m = \sqrt{\frac{\%p_0 \times \%p_1}{n}}$$

U našem primjeru:

$$m = \sqrt{\frac{76,47 \times 25,53}{1020}} = 1,3834\%$$

$M_1 = 76.47\%$ dvoreca
$M_2 = 25.53\%$ šesteroreca
$m \;= \pm\, 1.3834\%$ dvoreca ili šesteroreca.

I ovom je metodom potvrđeno, da su u našem primjeru srednje vrijednosti M_1 i M_2 varijaciono-statistički opravdane, jer je trostruka srednja pogreška manja od svake ove vrijednosti.

γ) Kad proučavamo omjer različitih fenotipova u F_2 generaciji, najbolje je, ako nam za temelj služi kombinacioni broj K. U našem primjeru ima 780 biljaka s dvorednim klasom i 240 biljaka sa šesterorednim klasovima.

Omjer 780 : 240 se najbolje slaže s teoretskim omjerom 3 : 1 kombinacionog broja K = 3 + 1 = 4.

Valja nam istražiti, da li pokusom dobiveni omjer varijaciono-statistički odgovara teoretskom omjeru 3 : 1.

Moramo izračunati srednju pogrešku spomenutog omjera. Srednju pogrešku izračunamo pomoću standardne devijacije σ. U ovom slučaju upotrebit ćemo formulu: $\sigma = 100 \sqrt{\frac{p_0 p_1}{n}}$ i izračunati σ obzirom na kombinacioni broj **K**, dakle:

$$\sigma = \frac{K\sqrt{p_0 p_1}}{n}$$

Ako uzmemo **K** za bazu, onda treba kod računanja uvijek upotrebiti samo dvije alternative. Na pr. kod kombinacionog broja K = 4 radimo s omjerom 3 : 1 ili 2 : 2; kod K = 16, ako je cjepanje 9 : 3 : 3 : 1 s omjerom 9 : 7, 13 : 3 ili 15 : 1, ako je cjepanje 9 : 3 : 4 operiramo s omjerom 9 : 7 i 12 : 4 i t. d.

Jasno je, da je za pojedine alternativne relacije i standardna devijacija različita.

Ako je **K** kombinacioni broj, a jedna alternativa označena s **N**, onda je druga (K — N).

Prema tome je:

$$\frac{K\sqrt{p_0 p_1}}{n} = \frac{K\sqrt{N(K-N)}}{K} = \sqrt{N(K-N)}$$

Kako je općenita formula za srednju pogrešku srednje vrijednosti: $m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, to je u našem slučaju $m = \sqrt{\frac{N(K-N)}{n}}$

Treba sada istražiti, u koliko se omjer biljaka 780 dvoredaca : 240 šesteroredaca podudara s idealnim omjerom 3 : 1.

$$\text{Za 3 je } m = \sqrt{\frac{3(4-3)}{1020}} = 0,00294$$

$$\text{Za 1 je } m = \sqrt{\frac{1(4-1)}{1020}} = 0,00294$$

I ovdje vrijedi pravilo, da je srednja vrijednost statistički opravdana, ako je veća od trostruke srednje pogreške. U našem je slučaju trostruka srednja pogreška manja od srednjih vrijednosti **3** odnosno **1**. Dakle srednje su vrijednosti varijaciono-statistički opravdane.

δ) U gornjem smo primjeru komparirali teoretske relativne brojke s eksperimentalno pronađenim relativnim brojkama. Ima i drugi način, a taj je, da apsolutne brojke dobivene kod pokusa uspoređujemo s teoretski očekivanim apsolutnim brojkama.

Teoretske apsolutne brojke izračunali smo već prije po formuli $\frac{n}{K}$. Srednju pogrešku ovih brojeva naći ćemo tako, da postavimo dvije alternative: jedna je apsolutna brojka (q) varijanata za jedno svojstvo, a druga je zbroj svih ostalih varijanata za drugo svojstvo (n—q), ako je **n** zbroj svih varijanata.

$m = \sqrt{\frac{q(n-q)}{n}}$ je formula za srednju pogrešku apsolutnih brojaka.

Za teoretsku apsolutnu brojku M = 780 je m =

$$= \sqrt{\frac{780\,(1020 - 780)}{1020}} = \mathbf{13{,}546}$$

I ovdje je trostruka srednja pogreška manja od srednjih vrijednosti M = 780 odnosno 240.

II. VIŠE ALTERNATIVA

U gornjem smo primjeru varijaciono-statistički istražili dvije alternative. Valja nam proučiti i one slučajeve, gdje ima više alternativa, a to je vrlo često baš u poljoprivrednoj genetici.

Kako je već spomenuto, križao sam jari rijetkoklasi šesteroredni ječam golog zrna s dvorednim ozimim ječmom obuvenog zrna.

Dosada smo istražili, kako se nasljeđuje broj redova na klasu. Proučit ćemo, kako se nasljeđuje i golo, odnosno obuveno zrno.

Za broj redova u našem su primjeru 2 alternative, a za svojstva zrna (golo odnosno obuveno) opet 2 alternative.

U takvom slučaju treba svaku pojedinu alternativu proučavati u odnosu prema svim ostalim alternativama.

Nas interesira, u kojem se omjeru pojavljuju četiri spomenuta fenotipa u F_2 generaciji.

a) Najprije želimo usporediti teoretske relativne brojke s relativnim brojkama dobivenim kod pokusa. Izračunat ćemo to tako, da apsolutne brojke dobivene eksperimentalnim putem pomnožimo sa $\frac{K}{n}$.

U našem se primjeru (str. 130) pokusom dobivena relacija fenotipopa najviše približava teoretskoj relaciji 9 : 3 : 3 : 1 s kombinacionim brojem K = 16.

Teoretskim relativnim brojevima 9 : 3 : 3 : 1 odgovaraju pokusom dobivene relativne brojke i to:

Za 9 .... $\frac{583 \times 16}{1020} = 9{,}145$ dvoredaca obuvenog zrna

Za 3 .... $\frac{197 \times 16}{1020} = 3{,}0901$ dvoredaca golog zrna

Za 3 .... $\frac{184 \times 16}{1020} = 2{,}886$ šesteroredaca obuvenog zrna

Za 1 .... $\frac{56 \times 16}{1020} = 0{,}8784$ šesteroredaca golog zrna.

Srednje su pogreške za teoretsku relaciju po formuli $m = \sqrt{\frac{N\,(K - N)}{n}}$ ove:

$$m = \sqrt{\frac{9 \times 7}{1020}} = 0{,}24872 \text{ za } 9$$

$$m = \sqrt{\frac{3 \times 13}{1020}} = 0{,}19553 \text{ za } 3$$

$$m = \sqrt{\frac{1 \times 15}{1020}} = 0{,}12128 \text{ za } 1$$

Budući da su srednje vrijednosti veće od trostruke srednje pogreške, to je naša teoretska pretpostavka, da se u F_2 generaciji stvaraju pojedini fenotipovi u omjeru 9 : 3 : 3 : 1 varijaciono-statistički opravdana. To proizlazi i iz relacije $\frac{D}{m_D}$, (u tab. XLVIII.) koje su manje od 3, a to znači, da razlika između teoretskog omjera 9 : 3 : 3 : 1 i pokusom dobivenog omjera nije statistički opravdana.

Tab. XLVIII.

Svojstva	Broj biljaka u pokusu	A omjer za K = 16	B očekivano za K = 16 M ± m	(A — B) = D	$\frac{D}{m_D}$
dvoredac obuveno zrno	583	9,145	9 ± 0,2487	0,145	0,583
dvoredac golo zrno	197	3,090	3 ± 0,1955	0,090	0,460
šesteroredac obuveno zrno	184	2,886	3 ± 0,1955	— 0,113	— 0,578
šesteroredac golo zrno	56	0,878	1 ± 0,1213	— 0,122	— 1,005

b) Za uspoređenje apsolutnih teoretskih i pokusom dobivenih brojaka služimo se slijedećom metodom:

Pokusom dobivene apsolutne brojke 583 : 197 : 184 : 56 (str. 130) odgovaraju ovim teoretskim apsolutnim brojkama izračunatim na temelju $\frac{n}{K}$.

$$\text{Za } 583 \ldots\ldots \quad 9 \times \frac{1020}{16} = 573{,}75$$

$$\text{Za } 197 \ldots\ldots \quad 3 \times \frac{1020}{16} = 191{,}25$$

$$\text{Za } 184 \ldots\ldots \quad 3 \times \frac{1020}{16} = 191{,}25$$

$$\text{Za } 56 \ldots\ldots \quad 1 \times \frac{1020}{16} = 63{,}75$$

Srednje su pogreške za teoretske apsolutne brojke po formuli $m = \sqrt{\frac{q\,(n-q)}{n}}$ ove:

$$\text{za } q = 573{,}75 \text{ je } m = \sqrt{\frac{573{,}75 \times 446{,}25}{1020}} = 15{,}843$$

$$\text{za } q = 191{,}25 \text{ je } m = \sqrt{\frac{191{,}25 \times 828{,}75}{1020}} = 12{,}465$$

$$\text{za } q = 63{,}75 \text{ je } m = \sqrt{\frac{63{,}75 \times 956{,}25}{1020}} = 7{,}7304$$

Apsolutne srednje vrijednosti ovdje su veće od trostruke srednje pogreške, pa je naša teoretska pretpostavka, da se u F_2 generaciji stvaraju pojedini fenotipovi u omjeru 573,75 : 191,25 : : 191,25 : 63,75 varijaciono-statistički opravdana. To proizlazi i iz relacije $\frac{D}{m_D}$ (u tab. XLIX.). Ove su relacije manje od 3, a to znači, da razlike između teoretskih apsolutnih brojaka 573,75 : 191,25 : 191,25 : 63,75 i pokusom dobivenih brojaka 583 : 197 : 184 : 56 nisu statistički opravdane.

Tab. XLIX.

A Broj biljaka kod pokusa	B očekivano M ± m	A — B = D	$\frac{D}{m_D}$
583	573,75 ± 15,843	9,25	0,583
197	191,25 ± 12,465	5,75	0,461
184	191,25 ± 12,465	— 7,25	— 0,581
56	63,75 ± 7,7304	— 7,75	— 1,005

III. VJEROJATNOST — PROBABILITET — P. x^2 — METODA

Do koje su mjere razlike između eksperimentalno dobivenih i teoretskih brojaka u granicama vjerojatnosti **P**, izračunamo pomoću x^2 metode.

x^2 je suma (Σ) kvocijenata kvadrata razlika eksperimentalnih (e) i teoretskih (t) brojaka, podijeljeno s teoretskim brojkama (t).

Dakle: $x^2 = \Sigma \frac{(e - t)^2}{t}$.

Što se eksperimentalno dobiveni brojevi bolje slažu s teoretskim, to je i x^2 manji. Izvjestan rezultat dobiven u pokusu ili opažanjem, može se više ili manje podudarati s teoretskom pretpostavkom. Uzroci velikih razlika među spomenutim brojkama mogu biti različiti.

Kod monohibridnog cijepanja očekujemo u F_2 generaciji fenotipove u teoretskom omjeru 3 : 1. Ako je na pr. kod pokusa ustanovljen apsolutni omjer fenotipova 84 : 30 t. j. 2,8 : 1, onda smatramo, da odgovara našoj pretpostavci t. j. teoretskom omjeru 3 : 1. Da smo kod pokusa pronašli omjer 3900 : 1000 t. j. 3,9 : 1, onda taj omjer ne odgovara cijepanju 3 : 1, a nastao je zbog različitih poremećenja. Jedno od takvih je u tome, što je životna sposobnost individua recesivnog razreda u nekih organizama slabija od individua dominantnog razreda. Pa i onda, kad ne bi bilo poremećenja, možemo teoretski očekivati u više bilijuna cijepanja omjer 3,9 : 1 samo jedampunt.

Da prosudimo, slaže li se naša pretpostavka (teoretske brojke) s eksperimentalnim podacima ili opažanjima, i do koje se mjere s njima podudara, treba utvrditi granicu, kod koje razlika između jednih i drugih brojaka nije više slučajno »moguća«, nego je posljedica nekih poremećenja.

Spomenuli smo, da pomoću x^2 određujemo, do koje se mjere podudaraju teoretske i empirijske brojke. Može se izračunati vjerojatnost — probabilitet P, kada će x^2 prekoračiti izvjesnu teoretsku vrijednost — pretpostavku.

Svakom x^2 odgovara izvjesna vrijednost za **P**. Ako se x^2 diže od 0 do neizmjerno, **P** se smanjuje od 1 do 0. Obično smatramo da je razlika između teoretske i empirijske srednje vrijednosti onda signifikantna, ako je veća od trostruke srednje pogreške.

U biometrici najčešće uzimamo za graničnu vrijednost P = 0.01 (= 1%). To znači, ako je razlika između teoretskih i empirijskih brojaka takva, da je u 100 slučajeva možemo očekivati jednom, onda kažemo, da se eksperimentalni podaci podudaraju s teoretskim.

Kod genetskih istraživanja služimo se graničnom vjerojatnošću P = 0,01 obično onda, kad želimo odrediti, da li je pokusni materijal heterogen ili nije.

Kad uspoređujemo empirijske brojke s teoretskim u pojedinim generacijama nakon križanja, onda se služimo graničnom vjerojatnošću P = 0,05. Dakle, ako je razlika između teoretskih i empirijskih brojaka takva, da se u 100 slučajeva pojavljuje barem 5 puta, onda smatramo, da su eksperimentalni podaci u skladu s teoretskim.

Izračunavanje x^2 i vjerojatnosti — P.

Računski postupak za x^2 prikazat ćemo na slijedećem primjeru:

U F_2 gen. od križanja obuvenog ječma crnih pljevica s golim ječmom žutih pljevica izrasli su fenotipovi u ovom omjeru:

298 biljaka obuvenog i crnog zrna,
85 biljaka obuvenog i žutog zrna,
92 biljke golog i crnog zrna,
27 biljaka golog i žutog zrna.

Ukupno: 502

Treba istražiti, da li ovaj omjer odgovara cijepanju 9:3:3:1. Da izračunamo x^2 valja nam ustanoviti razliku (e-t) između eksperimentalno (e) dobivenih i teoretskih (t) brojaka, i to za svaki fenotip posebno. Najprije ćemo svaku od ovih razlika

Tab. L.

Svojstva zrna	eks. - e	teoretski - t	e - t	$(e-t)^2$	$(e-t)^2 : t$
obuveni, crni	298	282,375 (9)	+ 15,625	244,1406	0,8645
obuveni, žuti	85	94,125 (3)	— 9,125	83,2656	0,8846
goli, crni	92	94,125 (3)	— 2,125	4,5156	0,0470
goli, žuti	27	31,375 (1)	— 4,375	19,1406	0,6100
Ukupno	502	502			2,406 = x^2

kvadrirati, a onda dividirati s odgovarajućom teoretskom brojkom (t). Suma svih ovih koeficijenata je tražena vrijednost x^2. U našem je slučaju x^2 = 2,406.

Nadalje treba izračunati, koliko je u našem slučaju neovisnih brojčanih skupina (degrees of freedom).

Uspoređivali smo četiri empirijske skupine brojaka s četiri teoretske. Od četiri empirijske brojčane skupine tri su neovisne, a četvrta rezultira iz ostalih triju. Dakle 4—1=3 ili općenito: broj neovisnih skupina (degrees of freedom) = n — 1. U Fisherovoj tabeli LI. str. 142 naći ćemo u rubrici za 3 neovisne skupine, da je od x^2=3,665 vjerojatnost P=0,3, a za x^2=2,366 vjerojatnost P=0,5. Prema tome je za naš x^2=2,406 vjerojatnost P=0,49. To znači, da možemo u 100 naših F_2 generacija očekivati barem 49 s isto takvom razlikom, koju smo dobili u našem primjeru između empirijskih i teoretskih podataka. Prema tome su naši empirijski podaci u skladu s teoretskim.

Da je P bio 0,01, onda bismo izvjesnu razliku u 100 F_2 gen. morali očekivati najviše jednom. Budući da se u tom slučaju empirijski podaci ne bi slagali s teoretskim, značilo bi, da je neslaganje uvjetovano različitim smetnjama.

Da je vjerojatnost P=0,999, trebalo bi takav rezultat primiti s velikom rezervom, on bi značio, da će se u hiljadu slučajeva izvjesna razlika pojaviti 999 puta. U takvom slučaju treba

Tab. LI.

Vjerojatnost — P

n	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	$0,0^3157$	$0,0^3628$	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14.953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40.256	43,773	47,962	50,892	59,703

istražiti, nema li izvjesnih računskih ili metodskih pogrešaka. Ako se konačno uvjerimo, da ih nema, onda je takvo podudaranje između empirijskih i teoretskih podataka moguće samo onda, ako pokus obuhvaća vrlo velik broj individua.

Kad su kod dihibrida geni za dva para svojstava neovisni t. j. lokalizirani svaki u drugom nehomolognom hromosomu, stvaraju se u F_2 generaciji četiri različna fenotipa u omjeru 9 : 3 : 3 : 1. Uzroci, što se katkada omjer fenotipova u F_2 generaciji mnogo razlikuje od teoretskog omjera 9 : 3 : 3 : 1 i što je vjerojatnost $P < 0{,}01$ mogu biti slijedeći:

1. pokusni su podaci heterogeni,
2. poremećenja: a) u cijepanju jednog para svojstava uvjetovanih genima **Ab**, ili

   b) u cijepanju drugog para svojstava, koje uvjetuju geni **Bb**,
3. geni za dva različita para svojstava lokalizirani su u istom hromosomu.

ad 1. I s t r a ž i v a n j e p o k u s n i h p o d a t a k a n a h e t e r o g e n o s t.

Rezultate pokusa, koje želimo varijaciono-statistički obraditi, sačinjavaju obično podaci od više pojedinačnih podjednakih pokusa na pr. od više F_1 gen, F_2 gen, od povratnih križanja (Aa Bb × aa bb) i t. d. Iz podataka dobivenih pokusom možemo stvoriti pravilne zaključke samo onda, ako varijaciono-statistički obradimo homogeni materijal.

Da li izvjesni podaci dolaze od homogenog pokusnog materijala ili ne, možemo najbolje istražiti pomoću x^2 metode.

Ako je pokusni materijal homogen, podaci pojedinačnih pokusa ne smiju se razlikovati od teoretskih podataka više nego što dopušta granična vjerojatnost t. j. $\mathbf{P} = 0{,}01$.

Kod homogenog materijala možemo podatke svih pojedinih pokusa proučiti zajedno.

Ako je pokusni materijal posve heterocigotan, ne možemo ga uopće ni upotrijebiti.

U slučaju, da se od većeg broja pojedinačnih pokusa samo nekoliko njih ne slaže (a to možemo istražiti pomoću x^2 metode), treba ih odstraniti iz daljnjeg biometričkog proučavanja, kad ustanovimo, zbog čega su razlike nastale. Na pr. križanjem četiriju genotipa pšenice-golice s druga četiri genotipa brkulje, razvile su se u F_2 generaciji biljke bez osja i biljke s osjem u slijedećem omjeru: (Tab. LII.)

Tab. LII.

Križanje broj	eksperimentalno e		teoretski t		ukupno	e — t	(e — t)²	(e — t)² : t		x²	P
	bez osja	s osjem	bez osja	s osjem							
1	161	43	153	51	204	± 8	64	0,418	1,254	1,672	0,2 — 0,1
2	84	10	70,5	23,5	94	± 13,5	182,25	2,585	7,755	10,340	0,01 — 0,001
3	194	76	202,50	67,50	270	± 8,50	72,25	0,357	0,107	0,564	0,2 — 0,1
4	169	48	162,75	54,25	217	± 6,25	39,0625	0,24	0,72	0,960	0,5 — 0,3
Ukupno	608	177	588,75	196,25						13,536	

Mjesto očekivanog omjera 3 : 1 (588,75 : 196,25) omjer je fenotipova 3,42 : 1 (608 : 177). Dakle se on ne podudara s teoretskim brojkama.

Pomoću x^2 — metode možemo istražiti, da li je materijal homogen ili nije.

Imamo podatke od četiri F_2 generacije (m) i za jedan par (2) svojstava (n). Prema tome je broj neovisnih skupina (m—1) . (n—1) = (4—1) . (2—1) = 3. Budući da je suma svih x^2 = 13,536 to je vjerojatnost **P** < 0,01 (Tab. LI.), dakle je materijal heterogen. U tom se slučaju križanje broj 2 ne podudara s ostalima, jer je za x^2 = 10,34, vjerojatnost P = 0,01 — 0,001 (Tab. LI.).

Dakle treba da drugo potomstvo izlučimo, a za ostala je tri potomstva onda omjer fenotipova: 524 : 167 t. j. 3,14 : 1.

Istražimo li sad heterogenost, naći ćemo, da je broj neovisnih skupina (m—1) . (n—1) = (3—1) . (2—1) = 2, dok je suma svih x^2 = 3,196 a vjerojatnost P > 0,2. Dakle pokusni je materijal homogen i empirijski se podaci slažu s teoretskim.

ad 2) Poremećenje u neovisnom cijepanju svojstava dihibrida u F_2 gen.

Kod neovisnog cijepanja svojstava dihibrida očekujemo u F_2 generaciji cijepanje genotipova u omjeru 9 : 3 : 3 : 1. Križanjem jednog jarog ječma s kapucom na klasu (furcatum) i golog zrna, s nekim ozimim ječmom s osjem na klasu i obuvenim zrnom, dobili smo u F_2 generaciji 4 fenotipa.

U tab. LIII. sakupljeni su brojčani podaci, eksperimentalni i teoretski, za omjer cijepanja svojstava: a) 9 : 3 : 3 : 1, te b) za kapucu na klasu s obuvenim i golim zrnom omjera 3 : 1 i osjem na klasu s obuvenim i golim zrnom omjera 3 : 1.

Nadalje su u istoj tabeli i x^2.

Jesu li pokusi u skladu s teoretskom pretpostavkom?

U omjeru 9 : 3 : 3 : 1 je x^2 = 14,954 (tab. LIII). Budući da ima četiri razreda različitih fenotipova, to su samo (4—1) = 3 razreda neovisna. U Fisherovoj tabeli ćemo naći, da je za 3 neovisne skupine i x^2 = 14,954 vjerojatnost **P** između 0,01 i 0,001.

Uzmemo li u križanja granični vjerojatnost **P** = 0,05, to u našem primjeru eksperimentalni podaci nisu u skladu s teoretskim.

Biljke s kapucom manje su otporne protiv zime negoli biljke s osjem na klasu. U skupini biljaka s kapucom usporedimo

eksperimentalne brojke za golo i obuveno zrno s teoretskim omjerom 3 : 1. Isto ćemo provesti i sa biljkama s osjem.

Broj neovisnih skupina je sada samo 2. Budući da $x^2 = 2{,}451$, to je vjerojatnost P = između 0.5 i 0.3. Dakle se eksperimentalni podaci sada mnogo bolje slažu s teoretskim nego prije.

Tab. LIII.

Svojstvo		eks. e	a: teor. t 9:3:3:1	a: $\frac{(e-t)^2}{t}$	b: teor. t (3:1):(3:1)	b: $\frac{(e-t)^2}{t}$
Furkatum	obuveni	286	326,25	4,966	298,5	0,523
	goli	112	108,75	0,097	99,5	1,570
Aristatum	obuveni	133	108,75	5,407	136,5	0,089
	goli	49	36,25	4,484	45,5	0,269
Ukupno		580	580,00	$14{,}954 = x^2$	580,0	$2{,}451 = x^2$

ad 3. Geni za 2 različita para svojstava lokalizirani su u istom hromosomu.

a) F_2 generacija:

Križanjem kukuruza normalnog endosperma (**Sh**) i aleurona u boji (**C**) s kukuruzom deformiranog endosperma (**sh**) i bezbojnog aleurona izrasla su u F_2 generaciji četiri fenotipa u slijedećem omjeru:

AB : **Ab** : **aB** : **ab** = 747 : 20 : 25 : 208 = 1000 = $n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = n$

Na prvi pogled vidimo, da se ovaj omjer fenotipova ne slaže s omjerom 9 : 3 : 3 : 1, koji dobijemo kod neovisnog cijepanja t. j. od neovisnih gena.

Da li se empirijski podaci slažu s teoretskim o neovisnom cijepanju, istražit ćemo pomoću x^2 metode.

Ako ustanovimo, da se oni ne slažu, iako su inače homogeni, onda mogu biti još tri uzroka nepodudaranja i to:

α) poremećenje u cijepanju za strukturu endosperma **Sh sh** (A),

β poremećenje u cijepanju za boju aleurona **Cc** (B),

γ) geni su vezani, dakle lokalizirani u istom hromosomu (**V**).

Bez obzira, da li su spomenuta dva gena za **Sh** i **C** lokalizirana u istom hromosomu ili nisu, omjer je fenotipova, ako nema smetnja u jednom ili drugom paru svojstava ili u oba, ovaj:

$$(Sh\,C + Sh\,c) : (sh\,C + sh\,c) = (n_1 + n_2) : (n_3 + n_4) = 3 : 1$$
$$(Sh\,C + sh\,C) : (Sh\,c + sh\,c) = (n_1 + n_3) : (n_2 + n_4) = 3 : 1$$

U našem je slučaju za svojstvo **Sh sh** omjer fenotipova $(Sh\,C + Sh\,c) : (sh\,C + sh\,c) = (747 + 20) : (25 + 208) = 3{,}29 : 1$ a za svojstvo **Cc**:

$(Sh\,C + sh\,C) : (Sh\,c + sh\,c) = (747 + 25) : (20 + 208) = 3{,}38 : 1$

I za jedan i za drugi par svojstava ima razlika u cijepanju između empirijskih podataka i teoretskog omjera 3 : 1. Razlike doduše nisu velike, ali ne možemo olako prijeći preko njih, a da se ne uvjerimo, jesu li smetnje u cijepanju varijaciono-statistički opravdane ili nisu. Zato ćemo izračunati x^2.

Od spomenuta tri slučaja, koji mogu utjecati na nepodudaranje empirijskih podataka s teoretskim, mogu u pokusu djelovati sva tri ili dva ili pak samo jedan.

Svaki od ovih slučajeva može da uzrokuje jedan dio od cjelokupne razlike. Prema tome se x^2 ili bolje x^2_n (n = ukupno) sastoji od ovih članova:

Ako se brojčani podaci odnose na F_2 generaciju t. j. na križanje AaBb × AaBb kao što je to u našem primjeru, onda izračunamo x^2 po ovim formulama:

$$x^2_A = (n_1 + n_2 - 3n_3 - 3n_4)^2 : 3n = [747 + 20 - (3 \times 25) - (3 \times 208)]^2 : 3 \times 1000 = 1{,}512,$$

iz toga proizlazi **P** > 0,05

$$x^2_B = (n_1 - 3n_2 \quad n_3 - 3n_4)^2 : 3n = [747 - (3 \times 20) + 25 - (3 \times 208)]^2 : 3 \times 1000 = 2{,}5812 \quad \text{dok je } \mathbf{P} > 0{,}05$$

$$x^2_V = (n_1 - 3n_2 - 3n_3 + 9n_4)^2 : 9n = [747 - (3 \times 20) - (3 \times 25) + (9 \times 208)]^2 : 9 \times 1000 = 685{,}584;$$

x^2_A, x^2_B i x^2_V pripada po jedna neovisna skupina. U Fisherovoj tabeli LI. potražimo vjerojatnost **P** od gornjih brojeva.

Na poremećaj u cijepanju jednog ili drugog para svojstava ili na vezane gene zaključujemo već onda, ako je P < 0,05.

Budući da je u našem slučaju za strukturu endosperma i za boju aleurona vjerojatnost P > 0,05, to znači, da ova svojstva

*

nisu bila u cijepanju tako poremećena, da empirijski podaci ne bi odgovarali teoretskim.

Ako ustanovimo, da nema smetnje u cijepanju za jedan i drugi par svojstava, a pokusni se podaci razlikuju od teoretskog omjera 9 : 3 : 3 : 1, onda nam još treba izračunati i $x^2{}_V$, pa da ustanovimo, jesu li geni vezani ili nisu. U slučaju, da je $P < 0,05$, a u našem je primjeru zaista tako, onda to znači, da su geni vezani.

b) P o v r a t n o   k r i ž a n j e:

Imamo li podatke o povratnom križanju, za izračunavanje x^2 upotrebit ćemo druge formule.

P r i m j e r:

Po povratnom križanju kukuruza normalnog endosperma i aleurona u boji (**Sh C . sh c**) s kukuruzom deformiranog endosperma i bezbojnog aleurona, razvila su se četiri fenotipa u ovom omjeru:

ShC	Shc	shC	shc	Ukupno
418	16	14	402	850
n_1	n_2	n_3	n_4	n

U tom je slučaju:

$$x^2{}_A = (n_1 + n_2 - n_3 - n_4)^2 : n = (418 + 16 - 14 - 402)^2 : 850 = 0,3812$$

i $P > 0,05$

$$x^2{}_B = (n_1 - n_2 + n_3 - n_4)^2 : n = (418 - 16 + 14 - 402)^2 : 850 = 0,2306$$

iz toga je $P > 0,05$

$$x^2{}_V = (n_1 - n_2 - n_3 + n_4)^2 : n = (418 - 16 - 14 + 402) : 850 = 734,235$$

dakle je $P < 0,01$.

Dakle i iz povratnog križanja vidimo, da nema biometrički opravdanih poremećenja u cijepanju za strukturu endosperma (**Sh sh**) i boju aleurona (**Cc**), jer je za P_A i za $P_B > 0,05$.

Iz $x^2{}_v = 734,235$ je vjerojatnost $P < 0,05$, to znači, da se geni (**Sh sh**) za strukturu endosperma i geni za boju (**Cc**) aleurona nalaze u istom hromosomu.

C. — 2. BIOMETRIKA KORELACIJE KVALITATIVNIH ILI ALTERNATIVNIH SVOJSTAVA

1. K o r e l a c i o n i   k o e f i c i j e n t — r

Kao kod kvantitativnih svojstava, tako i kod kvalitativnih međusobnu zavisnost istražujemo pomoću korelacionog koeficijenta i regresije. Na slijedećem primjeru izračunat ćemo korelacioni koeficijent za kvalitativna svojstva.

Križali smo rajčicu visoka rasta i sferičnih plodova s rajčicom niska rasta kruškolikih plodova zato, da u F_2 generaciji i daljnjim generacijama pronađemo po koju biljku niska rasta i sferičnih plodova. Osim toga htjeli smo istražiti, da li se visina biljke i oblik ploda nasljeđuje ovisno ili neovisno jedno od drugoga. U F_2 generaciji razvile su se biljke ovih svojstava i u ovom broju:

69 visoka rasta i sferičnih plodova
8 visoka rasta i kruškolikih plodova
7 niska rasta i sferičnih plodova
19 niska rasta i kruškolikih plodova

Je li visina biljke i oblik plodova u međusobnoj ovisnosti ili nije, naći ćemo tako, da izračunamo korelacioni koeficijent **r**. Na isti način kao kod kvantitativnih svojstava, treba i ovdje varijante poredati u korelacionu tabelu. Za suponovano svojstvo (x) uzet ćemo na pr. visinu biljke, a za relativno (y) svojstvo oblik ploda.

Korelaciona tabela je ovakva:

Tab. LIV.

		Oblik ploda y		Zbroj
		sferičan	kruškolik	
		0y	1y	
Rast x	visoki rast 0x	69 = pI	8 = pII	p_0x 77
	niski rast 1x	7 = pIII	19 = pIV	p_1x 26
	Zbroj	76 = p0y	27 = p1y	103

Korelacioni koeficijent izračunamo po Bravaisovoj formuli.

Ako korelaciona tabela ima samo 4 rubrike, kako je to u našem slučaju, onda se za alternativna svojstva gornja formula promijeni ovako:

$$r = \frac{p_I\, p_{IV} - p_{II}\, p_{III}}{\sqrt{p_{0x} \cdot p_{1x} \cdot p_{0y} \cdot p_{1y}}}$$

U našem je primjeru:

$$r = \frac{(69 \times 19) - (8 \times 7)}{\sqrt{77 \times 26 \times 76 \times 27}} = \frac{1311 - 56}{\sqrt{4108104}} = 0{,}619$$

Dakle između visine biljke i oblika ploda je jaka korelacija.

2. Srednja pogreška korelacionog koeficijenta — m_r

Mogu li se iz izračunatog korelacionog koeficijenta izvoditi pravilni zaključci, pronaći ćemo pomoću srednje pogreške takvog koeficijenta.

Srednja pogreška korelacionog koeficijenta izračunava se i za kvalitativna svojstva po formuli, koju smo upotrebili za kvantitativna svojstva: $m = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$

$$\text{U našem je primjeru } m_r = \frac{1 - 0{,}619^2}{\sqrt{103}} = \frac{0{,}616839}{10{,}149} = 0{,}0607.$$

Trostruka ova pogreška manja je od našeg korelacionog koeficijenta $r = 0.619$ tako, da je ta pogreška svakako realna t. j. signifikantna brojka za izvođenje pravilnih zaključaka.

3. Regresija

Regresija se i za alternativna svojstva izračunava po formulama za kvantitativna svojstva, dakle $R_{y/x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$,

$$\text{odnosno } R_{x/y} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

4. Srednja pogreška regresije

Ovu vrijednost izračunavamo po formulama, koje smo upotrebili za kvantitativna svojstva i to:

$$m_R = m_r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ za } R_{x/y} \text{ i po formuli:}$$

$$m_R = m_r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \text{ za } R_{y/x}$$

5. Asocijacioni koeficijent:

Jesu li dva svojstva korelativno vezana ili nisu, možemo približno ustanoviti pomoću asocijacionog koeficijenta, koji je izradio engleski statističar Yule.

Ovaj koeficijent glasi: $\textbf{As. k.} = \frac{p\,I\, p\,IV - p\,II\, p\,III}{p\,I\, p\,IV + p\,II\, p\,III}$

Za prijašnji primjer (str. 149) za visinu rasta i oblik plodova kod rajčice taj koeficijent je:

$$\textbf{As. k.} = \frac{69 \times 19 - 8 \times 7}{69 \times 19 + 8 \times 7} = \frac{1255}{1367} = 0{,}918$$

Asocijacioni koeficijent kreće se u pozitivnom i negativnom smjeru od 0—1. Za mjerenje njegove jačine može nam i ovdje poslužiti Roemer—Orphalova tabela (Tab. XXXVIII., str. 103).

C — 3. KORELACIJA IZMEĐU KVANTITATIVNIH I KVALITATIVNIH SVOJSTAVA

Kad na istim organizmima istražujemo kvantitativna i kvalitativna svojstva, katkada je potrebno znati, jesu li ta svojstva međusobno ovisna, pa ako jesu, kako je jaka ta ovisnost. Računski postupak, kad se radi o istraživanju korelacije između kvalitativnih i kvantitativnih svojstava, prikazat ćemo na ovom primjeru:

Križali smo jednu čistu liniju graška, koji ima veliko žuto sjeme, s drugom linijom koja ima malo i zeleno sjeme. Na biljkama F_2 generacije istražili smo boju i težinu sjemena, da proučimo, ima li korelacije između tih svojstava. Uz pomoć korelacione tabele izračunali smo korelacioni koeficijent.

Boju sjemena sam uzeo u korelacionoj tabeli za suponovano (x) svojstvo, a težinu sjemena za relativno (y) svojstvo.

Prema tome korelaciona tabela je ovakva: (Tab. LV.)

Tab LV.

		Težina sjemena (y) cg 9—12—15—18—21—24—27—30—33—36—39—42											Ukupno
Boja sjemena	žuta (Ax)=Ox	2	8	20	29	49	74	63	35	25	13	6	323 = p 0
	zelena 1x	1	4	13	20	19	23	17	15	9	5	1	125 = p 1
Ukupna		3	12	33	49	68	97	80	48	34	18	6	448

A y

Korelacioni koeficijent izračunamo i ovdje po formuli:

$$r = \frac{\Sigma\, pa_x\, a_y - n\, b_x\, b_y}{n\, \rho_x \times \rho_y}$$

Stoga se najprije mora izabrati polazna točka A_x i A_y (aproksimativne srednje vrijednosti) za svojstvo **x** i **y**. Uzmimo na pr. za Ax=Ox žutu boju i za Ay = 25,5 cg.

b_x izračunamo po formuli za kvalitativna svojstva $b_x = \frac{p_1}{n} =$

$= \frac{125}{448} = 0{,}279$, b_y pak po formuli za kvantitativna svojstva

$b_y = \frac{\Sigma\, pa}{n} = \frac{52}{448} = 0{,}116$. Kako je $A_x = O_x$ to su produkti

$p \cdot a_x \cdot a_y$ za žutu boju i težinu zrna ravni ništici, a isto tako i produkti u vertikalnom redu od A_y.

Prema tome preostaju samo produkti $p \cdot a_x \cdot a_y$ za zelenu boju, a izračunaju se ovako:

Pozitivni produkti su oni desno od A_y, a negativni oni lijevo od A_y, dakle:

Pozitivni produkti:

$p \;.\; a_x \;.\; a_y$	
17 . 1 . 1	17
13 . 1 . 2	26
19 . 1 . 3	27
5 . 1 . 5	10
1 . 1 . 5	5
Ukupno:	95

Negativni produkti:

$p \;.\; a_x \;.\; a_y$	
19 . 1 . 1	19
20 . 1 . 2	40
13 . 1 . 3	39
1 . 1 . 4	4
1 . 1 . 5	5
Ukupno:	— 107

$\Sigma pa_x\, a_y = -107 + 95 = -12.$

ρ_x izračunamo po formuli za standardnu devijaciju kvalitativnih svojstava:

$$\sigma = \frac{\sqrt{p_0\, p_1}}{n} = \frac{\sqrt{323 \times 125}}{448} = \pm\, 0{,}448 = \rho_x$$

Formula za ρ_y glasi: $\rho_y = \sqrt{\frac{\Sigma\, pa_y^2}{n} - b_y^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1844}{448} - (0{,}116)^2} = 2{,}026$$

$$r = \frac{\Sigma\, pa_x\, a_y - n\, b_x\, b_y}{n\, \rho_x\, \rho_y} = \frac{-12 - 448 \times 0{,}279 \times 0{,}116}{448 \times 0{,}448 \times 2{,}026} = -\, 0{,}033$$

Budući da je korelacioni koeficijent r = 0,033 slijedi, da između boje i težine sjemena graška nema nikakve korelacije. (Vidi tab. XXXVIII., str. 103).

D. NEKE BIOMETRIČKE OZNAKE I FORMULE

a) OZNAKE

A . . . polazna točka — aproksimativna srednja vrijednost (str. 22)

a . . . areal (str. 22)

As. k. . . asocijacioni koeficijent (str. 151.)

b . . . udaljenost srednje vrijednosti **M** od **A** izražena u arealima. $A + b \cdot a = M$ (str. 22.)

D . . . razlika — diferencija. Udaljenost jedne varijante **V** od *M* $D = V - M$ (str. 64.)

E . . . eksces (str. 53.)

E. P. . . vjerojatna pogreška (str. 39.)

F_1, F_2 **itd.** filijalne generacije kod bastarda (str. 127.)

K . . . kombinacioni broj za F_2 generaicju (str. 131.)

M . . . srednja vrijednost (str. 21.)

m . . . srednja pogreška (str. 36.)

m_D . . srednja pogreška diferencije (str. 72.)

m_S . . srednja pogreška sume (str. 72.)

m_M . . srednja pogreška srednje vrijednosti *M* (str. 36.)

m_v . . srednja pogreška varijacionog koeficijenta v (str. 38.)

m_σ . . srednja pogreška standardne devijacije (str. 38.)

m_r . . srednja pogreška korelacionog koeficijenta r (str. 107.)

m_R . . srednaj pogreška regresije (str. 109.)

Med . Medijana (str. 20.)

Mo . . Modus (str. 55.)

n . . . broj varijanata (individua, parcela, slučajeva i t. d.) (str. 12.)

P . . . probabilitet (str. 139.)

p . . . frekvencija (broj individua, parcelica, slučajeva i t. d.) u pojedinim razredima (str. 21.)

Q . . . kvartil (str. 28.)

q_1 . . . apsolutna vrijednost zadnje varijante u prvoj četvrtini varijacionog reda (str. 28.)

q_2 . . . apsolutna vrijednost zadnje varijante u drugoj četvrtini varijacionog reda (str. 21.)

q_3 . . . apsolutna vrijednost zadnje varijante u trećoj četvrtini varijacionog reda (str. 28.)

q . . . apsolutni broj individua jedne alternative (str. 135.)

R . . . regresija (str. 108.)

r . . . korelacioni koeficijent (str. 100.)

S . . . asimetrija krivulje (str. 50.)

Σ . . . znak zbrajanja (str. 21.)

σ . . . standardna devijacija (str. 29.)

ρ . . . . $\sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2}$ (str. 100.)

V . . . varijanta (str. 21.)

$V_š$ . . . varijaciona širina (str. 28.)

v . . . varijacioni koeficijent (str. 34.)

x^2 . . . x^2 metoda za izračunavanje probaliteta **P** (str. 139.)

b) FORMULE

A) Kvantitativna svojstva:

Mediana: str. 20.

$$\text{Med} = q_2$$

Srednja vrijednost: str. 21.

$$M = A + B = A + ab = A + a\frac{\Sigma pa}{n}$$

Varijaciona širina: str. 28.

$$V_š = V_n - V_1$$

Kvartil: str. 28.

$$Q = \frac{q_3 - q_1}{2}$$

Standardna devijacija: str. 33.

$$\sigma = \pm a\sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2} \text{ ili točnije}$$

$$\sigma = \pm a\sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n-1} - b^2}$$

$$\sigma = \pm a\sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2 - \frac{a^2}{12}} \quad \text{Sheppardova formula}$$

Kvartilni koeficijent: str. 34.

$$Q_k = \frac{100\,Q}{M}$$

Varijacioni koeficijent: str. 34.

$$v = \frac{100\,\sigma}{M}$$

Modus: str. 55.

$$\text{Mo} = 3\,\text{Med} - 2\,M$$

Asimetrija: str. 50.

$$S = \left(\frac{\Sigma pa^3}{n} - 3b\frac{\Sigma pa^2}{n} + 2b^3\right) : \rho^3$$

Ekscess: str. 53.

$$E = \left[\left(\frac{\Sigma pa^4}{n} - 4b\frac{\Sigma pa^3}{n} + 6b^2\frac{\Sigma pa^2}{n} - 3b^4\right) : \rho^4\right] - 3$$

Korelacioni koeficijent: str. 100.

a) Bravaisov: str. 100.

$$r = \frac{\Sigma pa_x a_y - n b_x b_y}{n \rho_x \rho_y}$$

za mali broj varijanata: str. 106.

$$r = \frac{\Sigma V_x V_y - n M_x M_y}{n \sigma_x \sigma_y}$$

b) parcijalni korelacioni koeficijent:

α) 3 različita korelirana svojstva: str. 109 i 110.

$$r_{12/3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{13})(1 - r^2_{23})}}$$

$$r_{23/1} = \frac{r_{23} - r_{13} \cdot r_{12}}{\sqrt{(1 - r^2_{13})(1 - r^2_{12})}}$$

$$r_{13/2} = \frac{r_{13} - r_{12} \cdot r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{12})(1 - r^2_{23})}}$$

β) 4 različita korelirana svojstva: str. 111.

$$r_{12/34} = \frac{r_{12/4} - r_{13/4} \cdot r_{23/4}}{\sqrt{(1 - r^2_{13/4})(1 - r^2_{23/4})}} \quad \text{i t. d.}$$

Regresija: str. 108.

a) $$R_{x/y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y};$$

b) $$R_{y/x} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Srednja pogreška: m

a) srednje vrijednosti: str. 36.

$$m_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

b) standardne devijacije: str. 38.

$$m_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

c) varijacionog koeficijenta: str. 38.

α) ako je v < 10:

$$m_v = \frac{v}{\sqrt{2n}}$$

β) ako je v > 10:

$$m_v = \frac{v}{\sqrt{2n}}\sqrt{1 + 2\left(\frac{v}{100}\right)^2}$$

d) korelacionog koeficijenta: str. 107.

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$$

e) regresije: str. 109.

α) $$m_{R\,x/y} = m_r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

β) $$m_{R\,y/x} = m_r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

f) diferencije: str. 72.

$$m_D = \sqrt{m^2_1 + m^2_2}$$

g) sume: str. 72.

$$m_S = \sqrt{m^2_1 + m^2_2 + \ldots\ldots m^2_x}$$

Vjerojatna pogreška — E:

a) srednje vrijednosti: str. 39.

$$EP_M = 0{,}6745\, m_M$$

b) standardne devijacije: str. 39.

$$EP_\sigma = 0{,}6745\, m$$

c) varijacionog koeficijenta: str. 39.

$$EP_v = 0{,}6745\, m_v$$

d) Peterova vjerojatna pogreška: str. 63.

α) za jednu varijantu sg:

$$EP_{sg} = 0{,}8453\,\frac{\Sigma(\pm D)}{\sqrt{n(n-1)}}$$

β) za srednju vrijednost M:

$$EP_M = 0{,}8453 \frac{\Sigma(+D)}{n\sqrt{n-1}}$$

e) Besselova vjerojatna pogreška: str. 63.

α) za jednu varijantu sg:

$$EP_{sg} = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{n-1}}$$

β) za srednju vrijednost M:

$$EP_M = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{n(n-1)}}$$

f) korelacionog koeficijenta: str.

$$EP_r = 0{,}6745\ m_r$$

g) regresije: str.

$$EP_R = 0{,}6745\ m_R$$

G r a f i č k i p r i k a z k o r e l a c i j e: str. 112. i 113.

1. Linearna podjela varijanata: y = a + bx

a) parni broj podataka:

$$b = \frac{1}{k}[2\Sigma(xy) - (n+1)(\Sigma(y)]$$

$$a = \frac{1}{n}[\Sigma(y) - \Sigma(n)b]$$

b) neparni broj podataka:

$$b = \frac{1}{k_1}[\Sigma(xy) - k_2\Sigma(y)]$$

$$a = \frac{1}{n}\Sigma(y) - k_2 b$$

2. Parabolična podjela varijanata: $y = a + bx + cx^2$

$$c = \frac{1}{k_3}[\alpha\Sigma(y) - \beta\Sigma(xy) + \gamma\Sigma(x^2y)]$$

$$b = \frac{1}{k}[2\Sigma(xy) - (n+1)\Sigma(y)] - (n+1)\cdot c$$ (parni broj podataka)

$$b = \frac{1}{k_1}[\Sigma(xy) - k_2\Sigma(y)] - (n+1)\cdot c$$ (neparni broj podataka)

$$a = \frac{1}{n}[\Sigma(y) - \Sigma(n)b - \Sigma(n^2)\cdot c]$$

B) K v a l i t a t i v n a s v o j s t v a:

Srednja vrijednost: str. 131.

$$M = \frac{p_1}{n}$$

Standardna devijacija za srednju vrijednost: str. 132. i 133.

$$\sigma = \pm\frac{\sqrt{p_0 p_1}}{n} \text{ ili}$$

$$\sigma = \pm\frac{100\sqrt{p_0 p_1}}{n} \text{ ili}$$

$$\sigma = \pm\sqrt{p_0\% \cdot p_1\%}$$

Standardna devijacija kombinacionog broja: str. 134.

$$\sigma = \pm\frac{K\sqrt{p_0 p_1}}{n}$$

Srednja pogreška **m**:

a) srednje vrijednosti: str. 134.

$$m_M = \sqrt{\frac{\%p_0\ \%p_1}{n}}$$

b) kombinacionog broja: str. 135.

$$m_K = \sqrt{\frac{N(K-N)}{n}}$$

c) apsolutnog broja: str. 135.

$$m_{aps} = \sqrt{\frac{q(n-q)}{n}}$$

K o r e l a c i o n i k o e f i c i j e n t: str. 150.

$$\mathbf{r} = \frac{pI\,pIV - pII\cdot pIII}{\sqrt{p_{0x}\,p_{1x}\,p_{0y}\,p_{1y}}}$$

A s o c i j a c i o n i k o e f i c i j e n t: str. 151.

$$\text{As. k.} = \frac{pI\,pIV - pII\,pIII}{pI\,pIV + pII\,pIII}$$

LITERATURA

Feldman W. M.: Biomathematic, London, 1923.

Fisher, R. A.: Statistical methods for research workers. London, 1938.

Fisher R. A. and Yates F.: Statistical tables. Edinburgh, 1938.

Isenbeck K.: Die Prüfung des Zuchterfolges. Roemer u. Rudorf: Handbuch der Pflanzenzüchtung. Bd. I., Berlin 1941.

Jastremski, Hotimskii, Stavrovskii i Bojarskii: Teorija matematičeskoj statistiki. Planhozgiz, 1931.

Janko J.: Záhlady statistické indukce. Praha 1937. (Nakl. St. uřadu statistického).

Johannsen W.: Elemente der exakten Erblichkeitslehre, Jena 1926.

Just G.: Praktische Übungen zur Vererbungslehre. Freiburg 1923.

Kapteyn J. C.: Skew frequency curves in biology and statistics, Groningen 1903.

Kapteyn J. C.: Definition of the Correlation Coefficient (Monthly Notices of R. Art Society, 1912.)

Kohn S.: Základy teorie statistické metody. Praha 1929. (Nakladem St. uřadu statistického).

Koller S.: Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. Dresden u. Leipzig 1943.

Kronacher C. u. Pataw C.: Biometrik, Berlin 1930.

Lang A.: Die experimentelle Vererbungslehre in der Zoologie seit 1900. Jena 1914.

Mikič F.: Smjer gibanja (trend); tablice za računanje kod ekvidistantnih apscisa (rukopis).

Pätau K.: Eine neue X^2 Tafel. Zeitschrift für induktive Abstammungs-u. Vererbungslehre. Bd. 80. Berlin 1942.

Pearson R.: Tables for Statisticians and Biometricians, Cambridge 1914.

Romanovskii: Elementi teorii korreljacii. Taškent 1928.

Quételet: »Anthropométric«, Paris 1871.

Sapegin A.: Variacionnaja statistika, 1929.

*

Sinnot E. and W. Dunn L. C.: Principle of genetics. New York and London 1939.

»Student«: The probable error of a mean. Biometrika. No VI. 1908.

Tavčar A.: Varijaciona statistika u eksperimentalnoj poljoprivredi. Izdanje Ministarstva poljoprivrede. Beograd 1929.

Tavčar A.: Temelji nauke o nasljedstvu. Izdanje Ministarstva poljoprivrede, Beograd 1930.

Tavčar A.: Caklavost i njen odnos napram drugim svojstvima pšeničnog zrna. Poljodjelska znanstvena smotra br. 4, Zagreb 1941.

Tavčar A.: Dvostruko-recesivno nasljeđivanje opadanja osja kod ječma. Poljodjelska znanstvena smotra br. 6. Zagreb 1942.

Tedin O.: Biologische Statistik. Roemer u. Rudorf: Handbuch der Pflanzenzüchtung. Bd. I. Berlin 1941.

Udny Yule G.: An Introduction to the Theory of Statistics, London 1917.

Udny Yule G.: On the Theory of Correlation. Journ. Royal Statistical Society, 1897.

Zöller W.: Formeln und Tabellen zur Errechnung des mittleren Fehlers. Berlin.

Biometrika, a Journal for the Study of Biological Problems.

SADRŽAJ

TABLICE ZA $\sqrt{n}$*

* F i s h e r, R. A, and Y a t e s, F.: Statistical tables. Edinburgh, 1938.

Uputa za upotrebu tablica

Z a d a t a k: Treba izvaditi drugi korijen:

$\sqrt{390}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{395}$, $\sqrt{39{,}5}$ $\sqrt{395{,}8}$ $\sqrt{39{,}58}$.

R j e š e n j e: U tablici lijevo od vertikalne linije potražimo najprije brojku 39. U horizontalnom smjeru od ove brojke su dva reda brojeva, prvi za neparni, a drugi za parni broj mjesta lijevo odnosno desno (ako je brojka manja od 1) od decimalne točke broja iz kojega vadimo drugi korijen.

U glavi tablice su u horizontalnom smjeru najprije brojke od 0 do 9, a zatim od 1 do 5.

Budući da $\sqrt{390}$ ima neparni broj mjesta, to potražimo u rubrici pod 0 u vertikalnom smjeru kod 39 za $\sqrt{390} = 19{,}749$, a za parni broj mjesta $\sqrt{39} = 6{,}245$.

$\sqrt{395} = 19{,}875$ (vertikalna rubrika 5),

$\sqrt{39{,}5} = 6{,}2849$ (vertikalna rubrika 5).

$\sqrt{395{,}8}$ {
- $\sqrt{395}$ 19,875
- za 0,8 desni dio tablice (rubrike 5 i 3) { 0,5 . . . . 13; 0,3 8
- $\sqrt{395{,}8} = 19{,}896$

$\sqrt{39{,}58}$ {
- $\sqrt{39{,}5}$ 6,2849
- za 0,08 desni dio tablice (rubrike 5 i 3) { 0,05 . . . . 40; 0,03 24
- $\sqrt{395{,}8} = 6{,}2913$

Naklada 3.000 primjeraka
Tisak je završen 27.-VII.-46.
Cijena Din 80·—
Odobrena je po Zemaljskom uredu za cijene pri Predsjedništvu vlade NRH-e odlukom broj 14.623 od 19.-VII.-46

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
10	10000	10050	10100	10149	10198	10247	10296	10344	10392	10440	5	10	15	20	24
	31623	31780	31937	32094	32249	32404	32558	32711	32863	33015	15	31	46	62	77
11	10488	10536	10583	10630	10677	10724	10770	10817	10863	10909	5	9	14	19	23
	33166	33317	33466	33615	33764	33912	34059	34205	34351	34496	15	30	44	59	74
12	10954	11000	11045	11091	11136	11180	11225	11269	11314	11358	4	9	13	18	22
	34641	34785	34928	35071	35214	35355	35496	35637	35777	35917	14	28	43	57	71
13	11402	11446	11489	11533	11576	11619	11662	11705	11747	11790	4	9	13	17	22
	36056	36194	36332	36469	36606	36742	36878	37014	37148	37283	14	27	41	55	68
14	11832	11874	11916	11958	12000	12042	12083	12124	12166	12207	4	8	13	17	21
	37417	37550	37683	37815	37947	38079	38210	38341	38471	38601	13	26	39	53	66
15	12247	12288	12329	12369	12410	12450	12490	12530	12570	12610	4	8	12	16	20
	38730	38859	38987	39115	39243	39370	39497	39623	39749	39875	13	25	38	51	64
16	12649	12689	12728	12767	12806	12845	12884	12923	12961	13000	4	8	12	16	20
	40000	40125	40249	40373	40497	40620	40743	40866	40988	41110	12	25	37	49	62
17	13038	13077	13115	13153	13191	13229	13266	13304	13342	13379	4	8	11	15	19
	41231	41352	41473	41593	41713	41833	41952	42071	42190	42308	12	24	36	48	60
18	13416	13454	13491	13528	13565	13601	13638	13675	13711	13748	4	7	11	15	18
	42426	42544	42661	42778	42895	43012	43128	43243	43359	43474	12	23	35	47	58
19	13784	13820	13856	13892	13928	13964	14000	14036	14071	14107	4	7	11	14	18
	43589	43704	43818	43932	44045	44159	44272	44385	44497	44609	11	23	34	45	57
20	14142	14177	14213	14248	14283	14318	14353	14387	14422	14457	4	7	10	14	18
	44721	44833	44944	45056	45166	45277	45387	45497	45607	45717	11	22	33	44	55
21	14491	14526	14560	14595	14629	14663	14697	14731	14765	14799	3	7	10	14	17
	45826	45935	46043	46152	46260	46368	46476	46583	46690	46797	11	22	32	43	54
22	14832	14866	14900	14933	14967	15000	15033	15067	15100	15133	3	7	10	13	17
	46904	47011	47117	47223	47329	47434	47539	47645	47749	47854	11	21	32	42	53
23	15166	15199	15232	15264	15297	15330	15362	15395	15427	15460	3	7	10	13	16
	47958	48062	48166	48270	48374	48477	48580	48683	48785	48888	10	21	31	41	52
24	15492	15524	15556	15588	15620	15652	15684	15716	15748	15780	3	6	10	13	16
	48990	49092	49193	49295	49396	49497	49598	49699	49800	49900	10	20	30	40	51
25	15811	15843	15875	15906	15937	15969	16000	16031	16062	16093	3	6	9	13	16
	50000	50100	50200	50299	50398	50498	50596	50695	50794	50892	10	20	30	40	50
26	16125	16155	16186	16217	16248	16279	16310	16340	16371	16401	3	6	9	12	15
	50990	51088	51186	51284	51381	51478	51575	51672	51769	51865	10	19	29	39	49
27	16432	16462	16492	16523	16553	16583	16613	16643	16673	16703	3	6	9	12	15
	51962	52058	52154	52249	52345	52440	52536	52631	52726	52820	10	19	29	38	48
28	16733	16763	16793	16823	16852	16882	16912	16941	16971	17000	3	6	9	12	15
	52915	53009	53104	53198	53292	53385	53479	53572	53666	53759	9	19	28	38	47
29	17029	17059	17088	17117	17146	17176	17205	17234	17263	17292	3	6	9	12	15
	53852	53944	54037	54129	54222	54314	54406	54498	54589	54681	9	18	28	37	46

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
30	17321	17349	17378	17407	17436	17464	17493	17521	17550	17578	3	6	9	11	14
	54772	54863	54955	55045	55136	55227	55317	55408	55498	55588	9	18	27	36	45
31	17607	17635	17664	17692	17720	17748	17776	17804	17833	17861	3	6	8	11	14
	55678	55767	55857	55946	56036	56125	56214	56303	56391	56480	9	18	27	36	45
32	17889	17916	17944	17972	18000	18028	18055	18083	18111	18138	3	6	8	11	14
	56569	56657	56745	56833	56921	57009	57096	57184	57271	57359	9	18	26	35	44
33	18166	18193	18221	18248	18276	18303	18330	18358	18385	18412	3	5	8	11	14
	57446	57533	57619	57706	57793	57879	57966	58052	58138	58224	9	17	26	35	43
34	18439	18466	18493	18520	18547	18574	18601	18628	18655	18682	3	5	8	11	14
	58310	58395	58481	58566	58652	58737	58822	58907	58992	59076	9	17	26	34	43
35	18708	18735	18762	18788	18815	18841	18868	18894	18921	18947	3	5	8	11	13
	59161	59245	59330	59414	59498	59582	59666	59749	59833	59917	8	17	25	34	42
36	18974	19000	19026	19053	19079	19105	19131	19157	19183	19209	3	5	8	10	13
	60000	60083	60166	60249	60332	60415	60498	60581	60663	60745	8	17	25	33	41
37	19235	19261	19287	19313	19339	19365	19391	19416	19442	19468	3	5	8	10	13
	60828	60910	60992	61074	61156	61237	61319	61400	61482	61563	8	16	25	33	41
38	19494	19519	19545	19570	19596	19621	19647	19672	19698	19723	3	5	8	10	13
	61644	61725	61806	61887	61968	62048	62129	62209	62290	62370	8	16	24	32	40
39	19748	19774	19799	19824	19849	19875	19900	19925	19950	19975	3	5	8	10	13
	62450	62530	62610	62690	62769	62849	62929	63008	63087	63166	8	16	24	32	40
40	20000	20025	20050	20075	20100	20125	20149	20174	20199	20224	2	5	7	10	12
	63246	63325	63403	63482	63561	63640	63718	63797	63875	63953	8	16	24	31	39
41	20248	20273	20298	20322	20347	20372	20396	20421	20445	20469	2	5	7	10	12
	64031	64109	64187	64265	64343	64420	64498	64576	64653	64730	8	16	23	31	39
42	20494	20518	20543	20567	20591	20616	20640	20664	20688	20712	2	5	7	10	12
	64807	64885	64962	65038	65115	65192	65269	65345	65422	65498	8	15	23	31	38
43	20736	20761	20785	20809	20833	20857	20881	20905	20928	20952	2	5	7	10	12
	65574	65651	65727	65803	65879	65955	66030	66106	66182	66257	8	15	23	30	38
44	20976	21000	21024	21048	21071	21095	21119	21142	21166	21190	2	5	7	10	12
	66332	66408	66483	66558	66633	66708	66783	66858	66933	67007	8	15	22	30	38
45	21213	21237	21260	21284	21307	21331	21354	21378	21401	21424	2	5	7	9	12
	67082	67157	67231	67305	67380	67454	67528	67602	67676	67750	7	15	22	30	37
46	21448	21471	21494	21517	21541	21564	21587	21610	21633	21656	2	5	7	9	12
	67823	67897	67971	68044	68118	68191	68264	68337	68411	68484	7	15	22	29	37
47	21679	21703	21726	21749	21772	21794	21817	21840	21863	21886	2	5	7	9	12
	68557	68629	68702	68775	68848	68920	68993	69065	69138	69210	7	15	22	29	36
48	21909	21932	21954	21977	22000	22023	22045	22068	22091	22113	2	5	7	9	11
	69282	69354	69426	69498	69570	69642	69714	69785	69857	69929	7	14	22	29	36
49	22136	22159	22181	22204	22226	22249	22271	22293	22316	22338	2	4	7	9	11
	70000	70071	70143	70214	70285	70356	70427	70498	70569	70640	7	14	21	28	36

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
50	22361	22383	22405	22428	22450	22472	22494	22517	22539	22561	2	4	7	9	11
	70711	70781	70852	70922	70993	71063	71134	7 204	71274	71344	7	14	21	28	35
51	22583	22605	22627	22650	22672	22694	22716	22738	22760	22782	2	4	7	9	11
	71414	71484	71554	71624	71694	71764	71833	71903	71972	72042	7	14	21	28	35
52	22804	22825	22847	22869	22891	22913	22935	22956	22978	23000	2	4	7	9	11
	72111	72180	72250	72319	72388	72457	72526	72595	72664	72732	7	14	21	28	34
53	23022	23043	23065	23087	23108	23130	23152	23173	23195	23216	2	4	6	9	11
	72801	72870	72938	73007	73075	73144	73212	73280	73348	73417	7	14	21	27	34
54	23238	23259	23281	23302	23324	23345	23367	23388	23409	23431	2	4	6	9	11
	73485	73553	73621	73689	73756	73824	73892	73959	74027	74095	7	14	20	27	34
55	23452	23473	23495	23516	23537	23558	23580	23601	23622	23643	2	4	6	8	11
	74162	74229	74297	74364	74431	74498	74565	74632	74699	74766	7	13	20	27	34
56	23664	23685	23707	23728	23749	23770	23791	23812	23833	23854	2	4	6	8	11
	74833	74900	74967	75033	75100	75166	75233	75299	75366	75432	7	13	20	27	33
57	23875	23896	23917	23937	23958	23979	24000	24021	24042	24062	2	4	6	8	10
	75498	75565	75631	75697	75763	75829	75895	75961	76026	76092	7	13	20	26	33
58	24083	24104	24125	24145	24166	24187	24207	24228	24249	24269	2	4	6	8	10
	76158	76223	76289	76354	76420	76485	76551	76616	76681	76746	7	13	20	26	33
59	24290	24310	24331	24352	24372	24393	24413	24434	24454	24474	2	4	6	8	10
	76811	76877	76942	77006	77071	77136	77201	77266	77330	77395	6	13	19	26	32
60	24495	24515	24536	24556	24576	24597	24617	24637	24658	24678	2	4	6	8	10
	77460	77524	77589	77653	77717	77782	77846	77910	77974	78038	6	13	19	26	32
61	24698	24718	24739	24759	24779	24799	24819	24839	24860	24880	2	4	6	8	10
	78102	78166	78230	78294	78358	78422	78486	78549	78613	78677	6	13	19	26	32
62	24900	24920	24940	24960	24980	25000	25020	25040	25060	25080	2	4	6	8	10
	78740	78804	78867	78930	78994	79057	79120	79183	79246	79310	6	13	19	25	32
63	25100	25120	25140	25159	25179	25199	25219	25239	25259	25278	2	4	6	8	10
	79373	79436	79498	79561	79624	79687	79750	79812	79875	79937	6	13	19	25	31
64	25298	25318	25338	25357	25377	25397	25417	25436	25456	25475	2	4	6	8	10
	80000	80062	80125	80187	80250	80312	80374	80436	80498	80561	6	12	19	25	31
65	25495	25515	25534	25554	25573	25593	25612	25632	25652	25671	2	4	6	8	10
	80623	80685	80747	80808	80870	80932	80994	81056	81117	81179	6	12	19	25	31
66	25690	25710	25729	25749	25768	25788	25807	25826	25846	25865	2	4	6	8	10
	81240	81302	81363	81425	81486	81548	81609	81670	81731	81792	6	12	18	25	31
67	25884	25904	25923	25942	25962	25981	26000	26019	26038	26058	2	4	6	8	10
	81854	81915	81976	82037	82098	82158	82219	82280	82341	82401	6	12	18	24	30
68	26077	26096	26115	26134	26153	26173	26192	26211	26230	26249	2	4	6	8	10
	82462	82523	82583	82644	82704	82765	82825	82885	82946	83006	6	12	18	24	30
69	26268	26287	26306	26325	26344	26363	26382	26401	26420	26439	2	4	6	8	10
	83066	83126	83187	83247	83307	83367	83427	83487	83546	83606	6	12	18	24	30
70	26458	26476	26495	26514	26533	26552	26571	26589	26608	26627	2	4	6	8	9
	83666	83726	83785	83845	83905	83964	84024	84083	84143	84202	6	12	18	24	30
71	26646	26665	26683	26702	26721	26739	26758	26777	26796	26814	2	4	6	7	9
	84261	84321	84380	84439	84499	84558	84617	84676	84735	84794	6	12	18	24	30
72	26833	26851	26870	26889	26907	26926	26944	26963	26981	27000	2	4	6	7	9
	84853	84912	84971	85029	85088	85147	85206	85264	85323	85381	6	12	18	23	29
73	27019	27037	27055	27074	27092	27111	27129	27148	27166	27185	2	4	6	7	9
	85440	85499	85557	85615	85674	85732	85790	85849	85907	85965	6	12	17	23	29
74	27203	27221	27240	27258	27276	27295	27313	27331	27350	27368	2	4	5	7	9
	86023	86081	86139	86197	86255	86313	86371	86429	86487	86545	6	12	17	23	29

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
75	27386	27404	27423	27441	27459	27477	27495	27514	27532	27550	2	4	5	7	9
	86603	86660	86718	86776	86833	86891	86948	87006	87063	87121	6	12	17	23	29
76	27568	27586	27604	27622	27641	27659	27677	27695	27713	27731	2	4	5	7	9
	87178	87235	87293	87350	87407	87464	87521	87579	87636	87693	6	11	17	23	29
77	27749	27767	27785	27803	27821	27839	27857	27875	27893	27911	2	4	5	7	9
	87750	87807	87864	87920	87977	88034	88091	88148	88204	88261	6	11	17	23	28
78	27928	27946	27964	27982	28000	28018	28036	28054	28071	28089	2	4	5	7	9
	88318	88374	88431	88487	88544	88600	88657	88713	88769	88826	6	11	17	23	28
79	28107	28125	28142	28160	28178	28196	28213	28231	28249	28267	2	4	5	7	9
	88882	88938	88994	89051	89107	89163	89219	89275	89331	89387	6	11	17	22	28
80	28284	28302	28320	28337	28355	28373	28390	28408	28425	28443	2	4	5	7	9
	89443	89499	89554	89610	89666	89722	89778	89833	89889	89944	6	11	17	22	28
81	28460	28478	28496	28513	28531	28548	28566	28583	28601	28618	2	4	5	7	9
	90000	90056	90111	90167	90222	90277	90333	90388	90443	90499	6	11	17	22	28
82	28636	28653	28671	28688	28705	28723	28740	28758	28775	28792	2	3	5	7	9
	90554	90609	90664	90719	90774	90830	90885	90940	90995	91049	6	11	16	22	28
83	28810	28827	28844	28862	28879	28896	28914	28931	28948	28965	2	3	5	7	9
	91104	91159	91214	91269	91324	91378	91433	91488	91542	91597	5	11	16	22	27
84	28983	29000	29017	29034	29052	29069	29086	29103	29120	29138	2	3	5	7	9
	91652	91706	91761	91815	91869	91924	91978	92033	92087	92141	5	11	16	22	27
85	29155	29172	29189	29206	29223	29240	29257	29275	29292	29309	2	3	5	7	9
	92195	92250	92304	92358	92412	92466	92520	92574	92628	92682	5	11	16	22	27
86	29326	29343	29360	29377	29394	29411	29428	29445	29462	29479	2	3	5	7	8
	92736	92790	92844	92898	92952	93005	93059	93113	93167	93220	5	11	16	22	27
87	29496	29513	29530	29547	29563	29580	29597	29614	29631	29648	2	3	5	7	8
	93274	93327	93381	93434	93488	93541	93595	93648	93702	93755	5	11	16	21	27
88	29665	29682	29698	29715	29732	29749	29766	29783	29799	29816	2	3	5	7	8
	93808	93862	93915	93968	94021	94074	94128	94181	94234	94287	5	11	16	21	27
89	29833	29850	29866	29883	29900	29917	29933	29950	29967	29983	2	3	5	7	8
	94340	94393	94446	94499	94552	94604	94657	94710	94763	94816	5	11	16	21	26
90	30000	30017	30033	30050	30067	30083	30100	30116	30133	30150	2	3	5	7	8
	94868	94921	94974	95026	95079	95131	95184	95237	95289	95341	5	11	16	21	26
91	30166	30183	30199	30216	30232	30249	30265	30282	30299	30315	2	3	5	7	8
	95394	95446	95499	95551	95603	95656	95708	95760	95812	95864	5	10	16	21	26
92	30332	30348	30364	30381	30397	30414	30430	30447	30463	30480	2	3	5	7	8
	95917	95969	96021	96073	96125	96177	96229	96281	96333	96385	5	10	16	21	26
93	30496	30512	30529	30545	30561	30578	30594	30610	30627	30643	2	3	5	7	8
	96437	96488	96540	96592	96644	96695	96747	96799	96850	96902	5	10	16	21	26
94	30659	30676	30692	30708	30725	30741	30757	30773	30790	30806	2	3	5	7	8
	96954	97005	97057	97108	97160	97211	97263	97314	97365	97417	5	10	15	21	26
95	30822	30838	30854	30871	30887	30903	30919	30935	30952	30968	2	3	5	6	8
	97468	97519	97570	97622	97673	97724	97775	97826	97877	97929	5	10	15	20	26
96	30984	31000	31016	31032	31048	31064	31081	31097	31113	31129	2	3	5	6	8
	97980	98031	98082	98133	98184	98234	98285	98336	98387	98438	5	10	15	20	25
97	31145	31161	31177	31193	31209	31225	31241	31257	31273	31289	2	3	5	6	8
	98489	98539	98590	98641	98691	98742	98793	98843	98894	98944	5	10	15	20	25
98	31305	31321	31337	31353	31369	31385	31401	31417	31432	31448	2	3	5	6	8
	98995	99045	99096	99146	99197	99247	99298	99348	99398	99448	5	10	15	20	25
99	31464	31480	31496	31512	31528	31544	31559	31575	31591	31607	2	3	5	6	8
	99499	99549	99599	99649	99700	99750	99800	99850	99900	99950	5	10	15	20	25